

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Хоменко Елена Семеновна **Министерство образования и науки Республики Саха (Якутия)**

Должность: исполняющая обязанности заведующей филиалом, начальник отдела  
**ГБПОУ РС (Я) «Ленский технологический техникум»**

учебно-производственной работы

Дата подписания: 03.11.2023 04:45:13

филиал «Пеледуйский»

Уникальный программный ключ:

03c04d4933a2307f9c20d0107fe3c7a0c84980be

Методические рекомендации по выполнению практических работ  
по учебной дисциплине ОП.02 «Механика»  
для студентов очного отделения среднего профессионального образования  
по профессии 26.02.03 «Судовождение»

Методические рекомендации по выполнению практических работ, разработаны в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. Основной профессиональной образовательной программы по специальности среднего профессионального образования 26.02.03 «Судовождение» и на основании Положения об организации практической работы в техникуме и методических рекомендаций об организации практической работы в условиях реализации ФГОС, утвержденных Методическим советом ГБПОУ РС (Я) «Ленский технологический техникум» филиал «Пеледуйский».

Организация-разработчик:

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Республики Саха (Якутия) «Ленский технологический техникум» филиал «Пеледуйский»

Разработчик: Филимонов Д.Б., мастер производственного обучения

Рассмотрена и рекомендована предметно – цикловой комиссией  
филиала «Пеледуйский»

Протокол № 2 «27» сентября 2023г.

Председатель ПЦК  /Вавилова Е.Ю. /

## Практическое занятие №1 (2ч.)

Определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил.

**Учебная цель:** Получить представление о методах нахождения равнодействующей силы

**Учебные задачи:**

1. Ознакомиться с методами нахождения равнодействующей силы
2. научиться решать статики
3. Научиться составлять уравнения равновесия

**Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- Проецировать силы на оси координат

знать:

- методы проекции силы на ось координат

**Задачи практического занятия:**

1. Найти модуль равнодействующей силы
2. Составить уравнения равновесия
3. Сделать проверку решения

**Обеспеченность занятия:**

1. Рабочая тетрадь (обычная, в клетку).
2. Раздаточные материалы (карточки-задания, инструкционные карты)
3. Ручка.
4. Карандаш простой

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия**

Пусть, к абсолютно твердому телу приложена система  $N$  сил ( $F_1, F_2, \dots, F_N$ ), расположенных в пространстве так, что их линии действия пересекаются в одной точке  $O$  (рисунок 1).

Такую систему сил называют системой сходящихся сил. Упростим систему сходящихся сил, т.е. решим первую задачу статики.

**Приведение к равнодействующей**

Докажем, что данная система сил эквивалентна одной силе, т.е. приводится к равнодействующей силе.

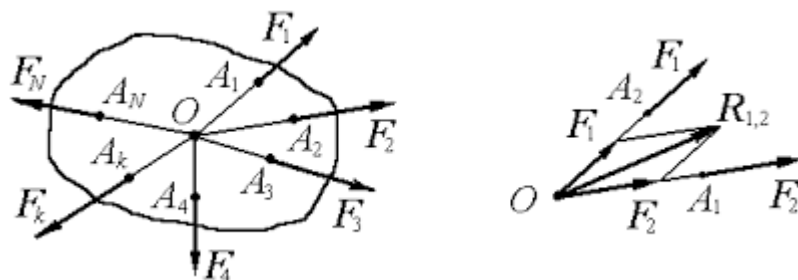


Рисунок 1

В самом деле, так как сила есть вектор скользящий, то все силы данной системы можно перенести вдоль линий их действия в точку  $O$ .

Далее, по четвертой аксиоме, силы  $F_1$  и  $F_2$  можно заменить их равнодействующей  $R_{1,2}$  (рисунок 1), которая определяется диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах, и направленной по этой диагонали, т.е.

$$(F_1, F_2) \sim R_{1,2},$$

где  $R_{1,2} = F_1 + F_2$

Далее можно записать аналогичные соотношения для полученной равнодействующей силы  $R_{1,2}^*$  и силы  $F_3$ , тогда

$$(R_{1,2} F_3) \sim (F_1, F_2, F_3) \sim R_{1,2,3},$$

где  $R_{1,2,3} = F_1 + F_2 + F_3$  и т.д.

Для системы  $N$  сил окончательно будем иметь

$$(F_1 F_2 \dots F_N) \sim R^*,$$

$$R^* = F_1 + F_2 + \dots + F_N = \Sigma F_i. \quad (1)$$

На рисунке 2, а показано построение равнодействующей указанным способом на примере системы, состоящей из четырех сил. Однако процесс определения равнодействующей удобнее вести иным путем, с помощью построения так называемого силового многоугольника.

Из конца вектора силы  $F_1$  (точки  $B$ ) проводим вектор  $BC$ , геометрически равный силе  $F_2$ . Из конца этого вектора (точки  $C$ ) проводим вектор  $CD$  равный силе  $F_3$ . Из конца этого вектора (точки  $D$ ) проводим вектор  $DE$ , равный силе  $F_4$ .

Полученный многоугольник  $ABCDE$  называется силовым многоугольником. Процесс его построения хорошо виден на рисунке 2, б. Стороны силового многоугольника называются *составляющими силами*. Вектор  $AE$ , соединяющий начало  $A$  первой силы с концом  $E$  последней силы и направленный навстречу составляющим силам, называется *закрывающей стороной силового многоугольника*.

Следовательно, равнодействующая системы сходящихся сил изображается в выбранном масштабе закрывающей стороной силового многоугольника, построенного на составляющих силах.

Нахождение равнодействующей системы сходящихся сил по правилу силового многоугольника называется векторным или геометрическим сложением сил.

Таким образом, мы доказали, что система сходящихся сил в общем случае эквивалентна одной силе, т.е. равнодействующей, которая приложена в точке пересечения линий действия всех сил и равна их геометрической сумме.

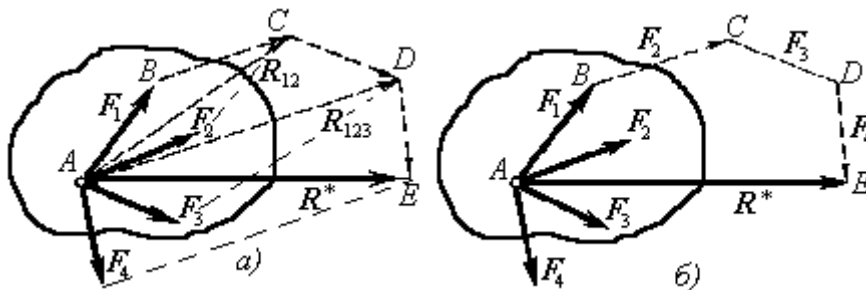


Рисунок 2

### Вычисление равнодействующей

Для аналитического определения равнодействующей найдем ее проекции  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  на оси декартовой системы координат. Имеем

$$R_x = \Sigma F_{kx}, \quad R_y = \Sigma F_{ky}, \quad R_z = \Sigma F_{kz}. \quad (2)$$

Тогда величина равнодействующей определится следующей формулой:

$$\vec{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (3)$$

или

$$\vec{R} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N F_{kz}\right)^2}. \quad (4)$$

Для определения направления равнодействующей  $R^*$  воспользуемся обычными выражениями для направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = R_x/R, \quad \cos \beta = R_y/R, \quad \cos \gamma = R_z/R. \quad (5)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы между положительным направлением осей координат и равнодействующей.

Равенства (2)-(5) позволяют определить модуль и направление равнодействующей по заданным проекциям составляющих сил.

В случае плоской системы сходящихся сил оси координат можно взять в плоскости действия сил и тогда формулы (2)-(5) упрощаются.

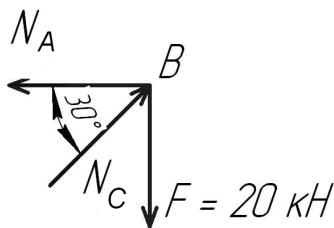
### Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что такое равнодействующая сила?
2. Как найти модуль равнодействующей?
3. Проекция силы на ось – это....
4. Правила знаков при проекции

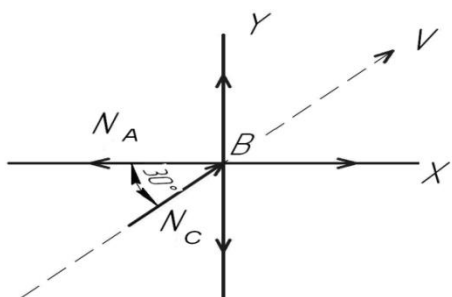
### Задания для практического занятия:

1. Выделяем узел (или точку) равновесие которого будем рассматривать. (В данном случае точку В).

2. Заменяем связи, действующие на точку, силами реакции.



3. Выбираем направление координатных осей. В принципе их можно провести как угодно, но желательно, чтобы как можно больше число неизвестных сил было к этим осям перпендикулярно.



4. Составляем для данной задачи уравнения равновесия и, решая их, находим неизвестные силы

$$\begin{cases} \sum X_K = 0 \\ \sum Y_K = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -N_A + N_C \times \cos 30^\circ = 0 \\ -F + N_C \times \sin 30^\circ = 0 \end{array} \right.$$

Выражаем  $N_C$  из второго уравнения

$$\begin{aligned} -F + N_C \times \sin 30^\circ &= 0 \\ N_C &= \frac{20}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{0.5} \end{aligned}$$

Т.к.  $N_C$  стало известно, можно решить первое уравнение.

$$-N_A + N_C \times \cos 30^\circ = 0$$

$$N_A = N_C \times \cos 30^\circ$$

$$N_A = 40 \times \cos 30^\circ$$

$$N_A = 40 \times 0,866 = 34,6 \text{ кН}$$

5. Для проверки правильности проведенного решения проводим произвольную ось  $V$ , не совпадающую с  $X$  и  $Y$  и составляем для нее уравнение равновесия.

Если после подставленных найденных величин, уравнение равно нулю, то задача решена верно.

$$-N_A \times \cos 30^\circ - F \times \sin 30^\circ + N_C = 0$$

$$-34,6 \times 0,866 - 20 \times 0,5 + 40 = -30 - 10 + 40 = 0$$

### **Инструкция по выполнению практического занятия**

- 1) Начертить расчетную схему в тетрадь
- 2) Найти модуль равнодействующей
- 3) Составить уравнения равновесия
- 4) Произвести проверку решения

### **Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.
3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.
5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### **Практическое занятие №2 (2ч.)**

#### **Пара сил и момент силы относительно точки.**

Зависимость между моментом пары и моментами сил пары относительно любой точки

**Учебная цель:** Рассчитать нагруженную балку. Определить реакции опор

#### **Учебные задачи:**

1. Ознакомиться с методами реакций опор
2. научиться решать задачи статики
3. Научиться составлять уравнения равновесия

#### **Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

#### уметь:

- Проецировать силы на оси координат

#### знать:

-методы проекции силы на ось координат

-момент силы относительно любой точки

#### **Задачи практического занятия:**

1. Во всех данных задачах требуется определить реакции опор балок.
2. Учащимся необходимо приобрести навыки определения реакций опор, так как с этого начинается решение многих задач по сопротивлению материалов и деталям машин.

#### **Обеспеченность занятия:**

5. Рабочая тетрадь (обычная, в клетку).
6. Раздаточные материалы (карточки-задания, инструкционные карты)
7. Ручка.

## 8. Карандаш простой

### Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

**Плоская произвольная система сил** - система сил, как угодно расположенных, в одной плоскости.

**Для равновесия** любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор  $\bar{F}$  этой системы сил и ее главный момент  $\bar{M}_O$  относительно любого центра  $O$  были равны нулю, то есть чтобы выполнялись условия

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_k = 0, \quad \bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k) = 0 \quad (1)$$

Из (1) вытекают три аналитических условия (уравнения) равновесия плоской произвольной системы сил, которые можно записать в трех различных формах.

**Первая** (основная) форма условий равновесия:

для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей  $X$  и  $Y$  и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки  $O$ , лежащей в плоскости действия сил, были равны нулю, то есть

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum M_O(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

**Вторая** форма условий равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Прямая  $AB$  не должна быть перпендикулярна оси  $X$ .

**Третья** форма условий равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_C(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Точки  $A, B, C$  не должны лежать на одной прямой.

**Проекцией силы**  $(\bar{F})$  на ось  $(X)$  называют отрезок  $(ab = F_x)$ , заключенный между перпендикулярами, опущенными из начала  $(A)$  и конца  $(B)$  вектора силы на эту ось.

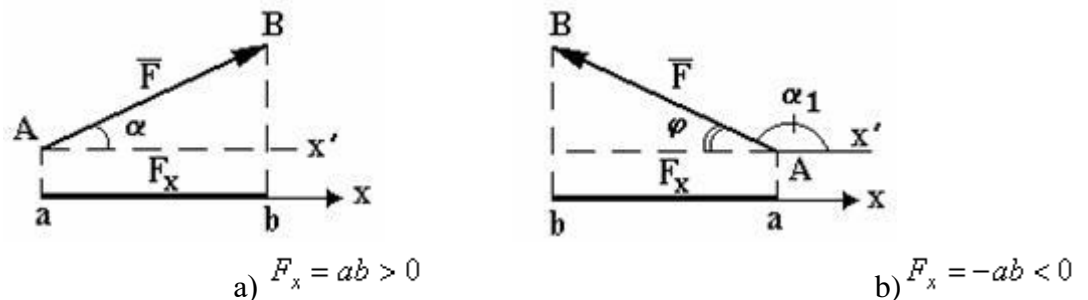


Рис. 1

Проекция силы на ось  $(F_x)$  равна произведению модуля силы  $(F)$  на косинус угла между силой  $(\bar{F})$  и положительным направлением оси  $(X)$ .

Из рис. 1 следует:

а) если этот угол ( $\alpha$ ) острый - проекция положительна и  $F_x = F \cdot \cos \alpha = ab$ ;

б) если угол ( $\alpha_1$ ) тупой - проекция отрицательна и  $F_x = F \cdot \cos \alpha_1 = -F \cdot \cos \varphi = -ab$ .

Практика показывает, что угол  $\alpha$  может быть (рис. 2):

- 1)  $\alpha_1^0 < 90^0$       2)  $\alpha_2^0 = 90^0$       3)  $\alpha_3^0 > 90^0$       4)  $\alpha_4^0 = 180^0$       5)  $\alpha_5^0 = 0^0$

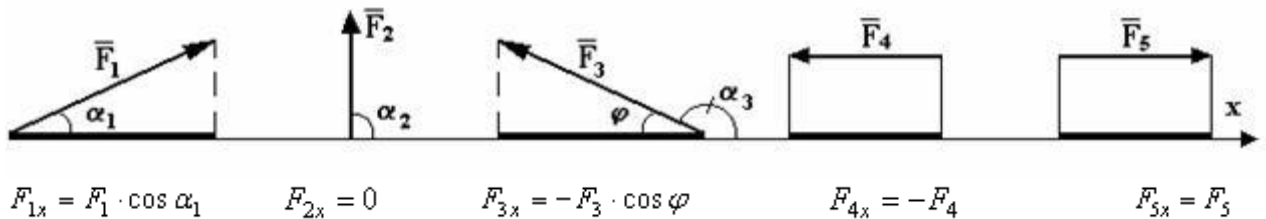
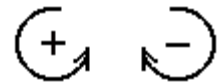


Рис. 2

**Моментом силы  $\vec{F}$**  относительно любой точки  $O$  называется произведение модуля силы на плечо, взятое со знаком плюс или минус.

$$M_0(F) = \pm F \cdot h$$



Плюс берется, если сила стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против хода часовой стрелки, минус, - если, - по ходу часовой стрелки.

**Плечо  $h$**  - кратчайшее расстояние от точки поворота  $O$  до линии действия силы.

Если линия действия силы пересекает точку  $O$ , то ее момент относительно этой точки равен нулю, так как  $h = 0$ .

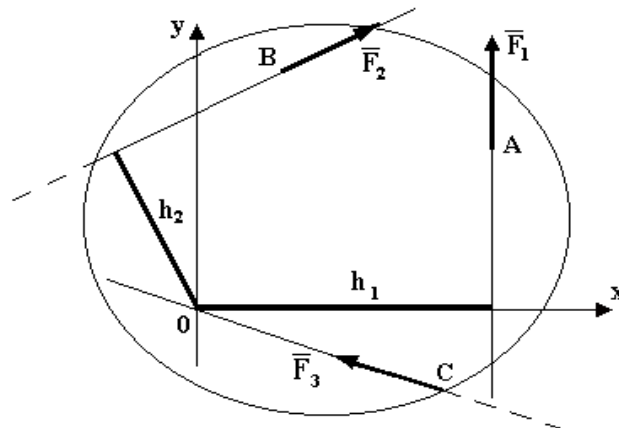


Рис. 3

Из рис. 3:

$$M_0(\vec{F}_1) = +F_1 \cdot h_1$$

$$M_0(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2$$

$$M_0(\vec{F}_3) = 0, \text{ так как } h_3 = 0.$$

При определении момента силы  $\vec{F}_2$ , у студента вызывает трудность вычисление плеча  $h_2$ . Поэтому, чтобы упростить эту задачу, надо:



- а) разложить силу  $\vec{F}_2$  на ее составляющие  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$  параллельно выбранным осям  $X$  и  $Y$ ;  
 б) применить теорему Вариньона (рис. 4)  
 $M_0(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_x) + M_0(\vec{F}_y)$  (5)

Момент равнодействующей силы  $(\vec{F})$  относительно точки  $O$  равен алгебраической сумме моментов составляющих ее сил  $(\vec{F}_x, \vec{F}_y)$  относительно той же точки  $O$ .

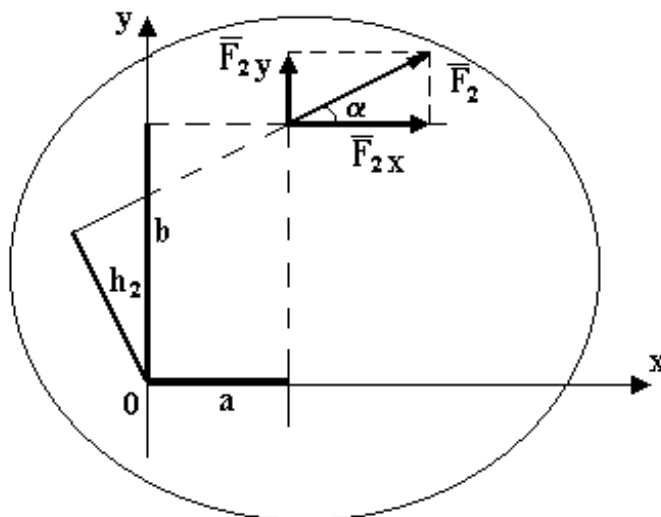


Рис. 4

$$M_0(\vec{F}_2) = -F_{2x} \cdot b + F_{2y} \cdot a \quad \text{или}$$

$$M_0(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot \cos \alpha \cdot b + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot a$$

**Парой сил** называют две силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  равные по величине, противоположно направленные и параллельные между собой (рис. 5).

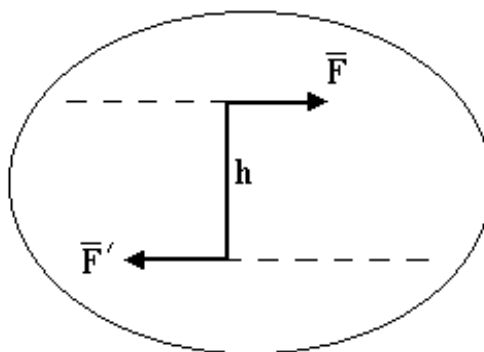


Рис. 5

**Моментом пары сил** называют произведение модуля одной из сил пары на плечо, взятое со знаком плюс или минус, то есть

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = \pm F \cdot h$$

Момент пары считается положительным, если пара, в плоскости ее действия, стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным, если, - по ходу.

**Плечо пары  $h$**  - кратчайшее расстояние между линиями действия пары.

Так как действие пары сил на твердое тело характеризуется (определяется) только моментом, то рис.6а и рис.6б считаются идентичными



Рис. 6

**Распределенные силы** - система сил распределенных вдоль поверхности по тому или иному закону.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее **интенсивностью**  $q$ .

$q$  - значение силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка.

Измеряется  $q$  в ньютонах, деленных на метр (Н/м).

При составлении расчетной схемы **распределенную нагрузку заменяют сосредоточенной силой**  $Q$ :

- величина силы  $Q$  пропорциональна площади эпюры распределения сил;
- направлена сила  $Q$  параллельно заданной нагрузке в сторону ее действия;
- линия действия силы  $Q$  проходит через центр тяжести той же эпюры распределения сил.

**Силы равномерно распределенные вдоль отрезка прямой АВ** (рис. 7а)

(например, силы тяжести, действующие на однородную балку).

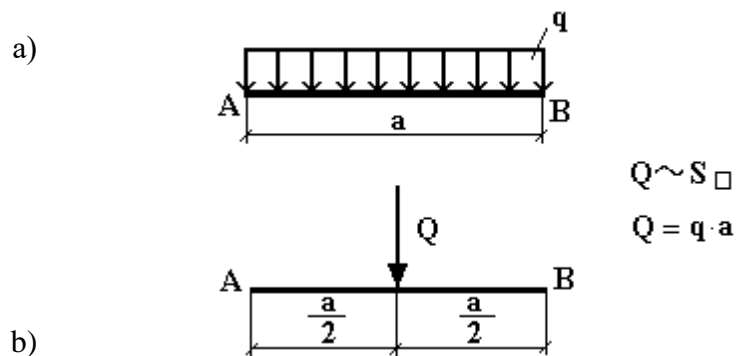


Рис. 7

**Силы распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону** (рис. 8а)

(например, силы давления воды на пластину).

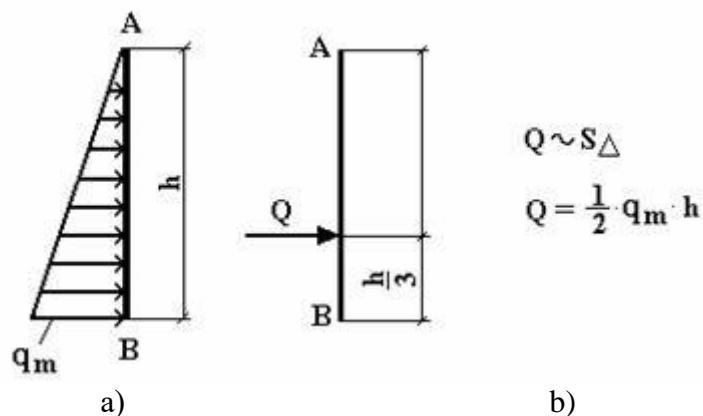


Рис. 8

### **Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:**

1. Реакции опор
2. Моменты сил относительно любой точки
3. Распределенные и сосредоточенные силы

### **Задания для практического занятия:**

1. . выбрать тело (точку), равновесие которого следует рассматривать;
2. освободить тело (шарнир  $B$ ) от связей и изобразить действующие на него активные силы и реакции отброшенных связей. Причем реакции стержней следует направить от шарнира  $B$ , так как принято считать предположительно стержни растянутыми;
3. выбрать систему координат, совместив ее начало с точкой  $B$ , и составить уравнения равновесия, используя условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости  $\sum X_i = 0, \sum Y_i = 0$ ;
4. определить реакции стержней из решения указанной системы уравнений;
5. проверить правильность полученных результатов по уравнению, которое не использовалось при решении задачи, либо решить задачу графически

### **Инструкция по выполнению практического занятия**

1. изобразить балку вместе с нагрузками;
2. выбрать расположение координатных осей, совместив ось  $x$  с балкой, а ось  $y$  направив перпендикулярно оси  $x$ ;
3. произвести необходимые преобразования заданных активных сил: силу, наклоненную к оси балки под углом  $\alpha$ , заменить двумя взаимно перпендикулярными составляющими, а равномерно распределенную по закону прямоугольника нагрузку – ее равнодействующей, приложенной к середине участка распределения нагрузки;
4. освободить балку от опор, заменив их действие реакциями опор, направленными вдоль выбранных осей координат;
5. составить уравнения равновесия статики для произвольной плоской системы сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных реакций опор;
6. проверить правильность найденных опорных реакций по уравнению, которое не было использовано для решения задачи.

### **Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.
3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.
5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### **Практическое занятие №3 (2ч.)**

Определение положения центра тяжести сложной геометрической формы

**Учебная цель:** уметь определять положение центра тяжести сложных геометрических фигур, составленных из стандартных профилей.

#### **Учебные задачи:**

1. Ознакомиться с методами определения центра тяжести
2. Научиться определять координаты центра тяжести

#### **Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- определять координаты центра тяжести.

знать:

-методы определения координат центра тяжести

-методы нахождения координат центра тяжести

**Задачи практического занятия:**

1. Ознакомиться с методами определения центра тяжести

2. Научиться определять координаты центра тяжести

**Обеспеченность занятия:**

Конспект лекций

Рабочая тетрадь (обычная, в клетку).

Раздаточные материалы (карточки-задания, инструкционные карты)

Ручка.

Карандаш простой

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия**

**Центр параллельных сил**

Рассмотрим две параллельные, направленные в одну сторону силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , приложенные к телу в точках  $A_1$  и  $A_2$  (рис.6.1). Эта система сил имеет равнодействующую  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , линия действия которой проходит через некоторую точку  $C$ . Положение точки  $C$  можно найти с помощью теоремы Вариньона:

$$m_C(\vec{R}) = m_C(\vec{F}_1) - m_C(\vec{F}_2) = 0.$$

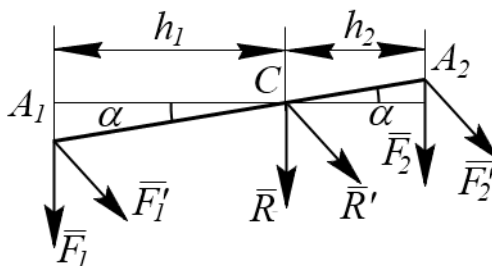


Рис.6.1

Если повернуть силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  около точек  $A_1$  и  $A_2$  в одну сторону и на один и тот же угол, то получим новую систему параллельных сил, имеющих те же модули. При этом их равнодействующая будет также проходить через точку  $C$ . Такая точка называется центром параллельных сил.

Рассмотрим систему параллельных и одинаково направленных сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ , приложенных к твердому телу в точках  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Эта система имеет

равнодействующую  $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ .

Если каждую силу системы повернуть около точек их приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, то получатся новые системы одинаково направленных параллельных сил с теми же модулями и точками приложения. Равнодействующая таких систем будет иметь тот же модуль  $R$ , но всякий раз другое направление. Сложив силы  $F_1$  и  $F_2$  найдем что их равнодействующая  $R_1$ , которая всегда будет проходить через точку  $C_1$ , положение которой определяется равенством  $F_1 \cdot A_1C_1 = F_2 \cdot A_2C_1$ . Сложив далее  $R_1$  и  $F_3$ , найдем их равнодействующую, которая всегда будет проходить через точку  $C_2$ , лежащую на прямой  $A_3C_2$ . Доведя процесс сложения сил до конца придем к выводу, что равнодействующая всех сил действительно всегда будет проходить через одну и ту же точку  $C$ , положение которой по отношению к точкам  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  будет неизменным.

Точка  $C$ , через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около точек их приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол называется центром параллельных сил (рис. 6.2).

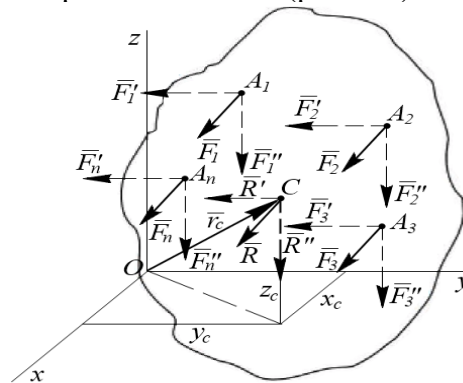


Рис.6.2

Определим координаты центра параллельных сил. Поскольку положение точки  $C$  по отношению к телу является неизменным, то ее координаты от выбора системы координат не зависят. Повернем все силы около их приложения так, чтобы они стали параллельны оси  $Oz$  и применим к повернутым силам теорему Вариньона. Так как  $R'$  является равнодействующей этих сил, то, согласно теореме Вариньона, имеем  $m_x(\overline{R'}) = \sum m_x(\overline{F'_k})$ , т.к.  $R' = R$ ,  $F'_k = F_k$ , получим

$$m_x(\overline{R'}) = R \cdot z_C = F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + \dots + F_n \cdot z_n = \sum F_k \cdot z_k.$$

Отсюда находим координату центра параллельных сил  $z_C$ :

$$z_C = \frac{\sum F_k z_k}{R}$$

Для определения координаты  $x_C$  составим выражение момента сил относительно оси  $Oz$ .

$$\begin{aligned} m_z(\overline{R'}) &= \sum m_z(\overline{F'_k}), \\ -R \cdot x_C &= -F_1 \cdot x_1 + (-F_2 \cdot x_2) + \dots + (-F_n \cdot x_n) = -\sum F_k \cdot x_k, \\ x_C &= \frac{\sum F_k x_k}{R}. \end{aligned}$$

Для определения координаты  $y_C$  повернем все силы, чтобы они стали параллельны оси  $Oz$ .

$$\begin{aligned} m_x(\overline{R''}) &= \sum m_x(\overline{F''_k}), \quad R'' = R, \quad F''_k = F_k, \\ -R \cdot y_C &= -F_1 \cdot y_1 + (-F_2 \cdot y_2) + \dots + (-F_n \cdot y_n) = -\sum F_k \cdot y_k, \\ y_C &= \frac{\sum F_k \cdot y_k}{R}. \end{aligned}$$

Положение центра параллельных сил относительно начала координат (рис. 6.2) можно определить его радиусом-вектором:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum \overline{F}_k \cdot \overline{r}_k}{R}$$

## 6.2. Центр тяжести твердого тела

*Центром тяжести* твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка  $C$ , через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести данного тела, при любом положении тела в пространстве.

Центр тяжести применяется при исследовании устойчивости положений равновесия тел и сплошных сред, находящихся под действием сил тяжести и в некоторых других случаях, а именно: в сопротивлении материалов и в строительной механике – при использовании правила

Верещагина.

Существуют два способа определения центра тяжести тела: аналитический и экспериментальный. Аналитический способ определения центра тяжести непосредственно вытекает из понятия центра параллельных сил.

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил, определяются формулами:

$$X_c = \frac{\sum(p_k x_k)}{P}; Y_c = \frac{\sum(p_k y_k)}{P}; Z_c = \frac{\sum(p_k z_k)}{P},$$

где  $P$  - вес всего тела;  $p_k$  - вес частиц тела;  $x_k, y_k, z_k$  - координаты частиц тела.

Для однородного тела вес всего тела и любой её части пропорционален объёму  $P=V\gamma$ ,  $p_k=v_k\gamma$ , где  $\gamma$  - вес единицы объёма,  $V$  - объём тела. Подставляя выражения  $P, p_k$  в формулы определения координат центра тяжести и, сокращая на общий множитель  $\gamma$ , получим:

$$X_c = \frac{\sum(v_k x_k)}{V}; Y_c = \frac{\sum(v_k y_k)}{V}; Z_c = \frac{\sum(v_k z_k)}{V}.$$

Точка  $C$ , координаты которой определяются полученными формулами, называется *центром тяжести объёма*.

Если тело представляет собой тонкую однородную пластину, то центр тяжести определяется формулами:

$$X_c = \frac{\sum(s_k x_k)}{S}; Y_c = \frac{\sum(s_k y_k)}{S},$$

где  $S$  – площадь всей пластины;  $s_k$  - площадь её части;  $x_k, y_k$  - координаты центра тяжести частей пластины.

Точка  $C$  в данном случае носит название *центра тяжести площади*.

Числители выражений, определяющих координаты центра тяжести плоских фигур, называются *статическими моментами площади* относительно осей  $y$  и  $x$ :

$$M_y = \sum s_k x_k; M_x = \sum s_k y_k.$$

Тогда центр тяжести площади можно определить по формулам:

$$X_c = \frac{M_y}{S}; Y_c = \frac{M_x}{S}.$$

Для тел, длина которых во много раз превышает размеры поперечного сечения, определяют центр тяжести линии. Координаты центра тяжести линии определяют формулами:

$$X_c = \frac{\sum(l_k x_k)}{L}; Y_c = \frac{\sum(l_k y_k)}{L}; Z_c = \frac{\sum(l_k z_k)}{L},$$

где  $L$  - длина линии;  $l_k$  - длина её частей;  $x_k, y_k, z_k$  - координата центра тяжести частей линии.

### 6.3. Способы определения координат центров тяжести тел

Основываясь на полученных формулах, можно предложить практические способы определения центров тяжести тел.

1. *Симметрия*. Если тело имеет центр симметрии, то центр тяжести находится в центре симметрии.

Если тело имеет плоскость симметрии. Например, плоскость  $XOY$ , то центр тяжести лежит в этой плоскости.

2. *Разбиение*. Для тел, состоящих из простых по форме тел, используется способ разбиения. Тело разбивается на части, центр тяжести которых находится методом симметрии. Центр тяжести всего тела определяется по формулам центра тяжести объёма (площади).

*Пример*. Определить центр тяжести пластины, изображенной на помещенном ниже рисунке (рис. 6.3). Пластину можно разбить на прямоугольники различным способом и определить координаты центра тяжести каждого прямоугольника и их площади.

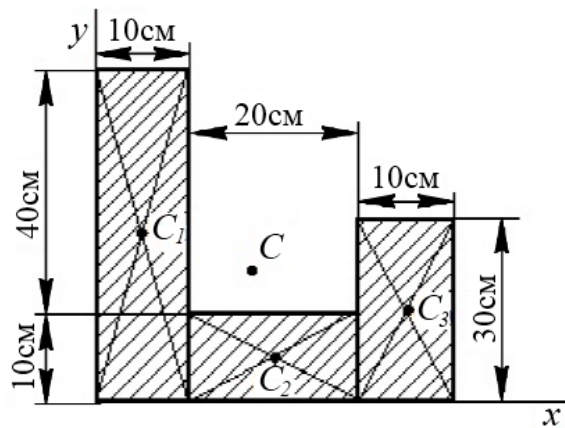


Рис.6.3

$$S_1 = 500 \text{ см}^2; x_{c1} = 5 \text{ см}; y_{c1} = 25 \text{ см}.$$

$$S_2 = 200 \text{ см}^2; x_{c2} = 20 \text{ см}; y_{c2} = 5 \text{ см}.$$

$$S_3 = 300 \text{ см}^2; x_{c3} = 35 \text{ см}; y_{c3} = 15 \text{ см}.$$

$$x_C = \frac{500 \cdot 5 + 200 \cdot 20 + 300 \cdot 35}{1000} = 17.0 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{500 \cdot 25 + 200 \cdot 5 + 300 \cdot 15}{1000} = 18.0 \text{ см}.$$

Ответ:  $x_C=17.0\text{см}$ ;  $y_C=18.0\text{см}$ .

3. *Дополнение.* Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он используется, когда тело имеет вырезы, срезы и др., если координаты центра тяжести тела без выреза известны.

*Пример.* Определить центр тяжести круглой пластины имеющей вырез радиусом  $r = 0,6 R$  (рис. 6.4).

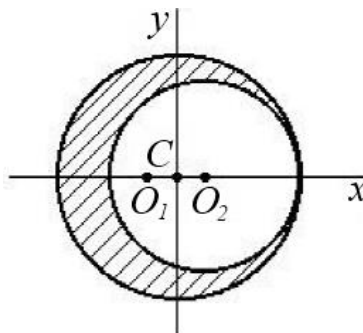


Рис.6.4

Круглая пластина имеет центр симметрии. Поместим начало координат в центре пластины.

Площадь пластины без выреза  $S_1 = \pi R^2$ , площадь выреза  $S_2 = \pi r^2 = \pi 0,36 R^2$ . Площадь пластины с вырезом  $S_2 = \pi R^2(1 - 0,36) = 0,64 \pi R^2$ ;  $x_{C2} = R - r = 0,4 R$ .

Пластина с вырезом имеет ось симметрии  $O1x$ , следовательно,  $y_C = 0$ .

$$x_C = \frac{S_1 \cdot 0 - S_2 \cdot x_{C2}}{S} = -\frac{\pi R^2 \cdot 0,36 \cdot 0,4 R}{\pi R^2 \cdot 0,64} = -0,225 R.$$

4. *Интегрирование.* Если тело нельзя разбить на конечное число частей, положение центров тяжести которых известны, тело разбивают на произвольные малые объемы  $\Delta V_k$ , для которых

$$x_C = \frac{1}{V} \sum \Delta V_k x_k.$$

формула с использованием метода разбиения принимает вид:

Далее переходят к пределу, устремляя элементарные объемы к нулю, т.е. стягивая объемы в точки. Суммы заменяют интегралами, распространенными на весь объем тела, тогда формулы определения координат центра тяжести объема принимают вид:

$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV; \quad y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV; \quad z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV.$$

Формулы для определения координат центра тяжести площади:

$$x_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS; \quad y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS.$$

Координаты центра тяжести площади необходимо определять при изучении равновесия пластинок, при вычислении интеграла Мора в строительной механике.

*Пример.* Определить центр тяжести дуги окружности радиуса  $R$  с центральным углом  $AOB = 2\alpha$  (рис. 6.5).

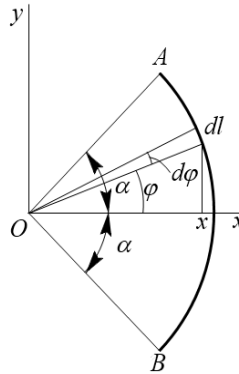


Рис. 6.5

Дуга окружности симметрична оси  $Ox$ , следовательно, центр тяжести дуги лежит на оси  $Ox$ ,  $y_C = 0$ .

Согласно формуле для центра тяжести линии:

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl; \quad dl = R d\varphi;$$

$$x = R \cos\varphi; \quad L = R \cdot 2\alpha;$$

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2R\alpha} R^2 \sin\varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \\ &= \frac{R^2 (\sin\alpha - \sin(-\alpha))}{2R\alpha} = \frac{R \sin\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

6. *Экспериментальный способ.* Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации можно определять экспериментально: методом подвешивания и взвешивания. Первый способ состоит в том, что тело подвешивается на тросе за различные точки. Направление троса на котором подвешено тело, будет давать направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести тела.

Метод взвешивания состоит в том, что сначала определяется вес тела, например автомобиля. Затем на весах определяется давление заднего моста автомобиля на опору. Составив уравнение равновесия относительно какой-либо точки, например оси передних колес, можно вычислить расстояние от этой оси до центра тяжести автомобиля (рис. 6.6).



$$\sum m_0(\bar{F}_k) = 0; P \cdot x - N \cdot a = 0; x = \frac{N \cdot a}{P}.$$

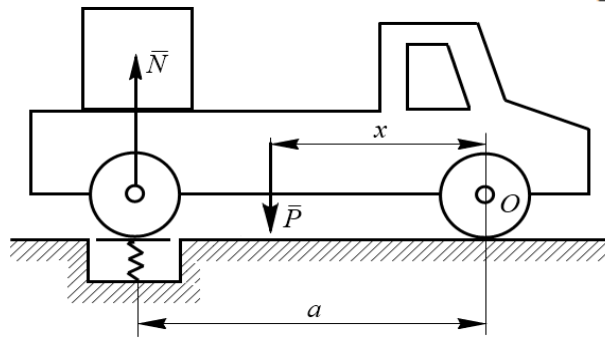


Рис.6.6

Иногда при решении задач следует применять одновременно разные методы определения координат центра тяжести.

### Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Метод симметрии
2. Метод разбиения
3. Метод отрицательных масс

### Задания для практического занятия:

1. сложное сечение разбиваем на простые, положение центра тяжести которых известно, либо легко может быть определено;
2. выбираем произвольно координатные оси. Если плоская фигура имеет ось симметрии, то рекомендуется провести одну из координатных осей вдоль оси симметрии. Так как центр тяжести  $S$  сечения лежит на оси симметрии (т.е. на одной из координатных осей), то необходимо определить лишь одну координату;
3. определяем площади простых сечений;
4. определяем координаты центров тяжести простых сечений относительно выбранных осей координат. Координаты центров тяжести простейших фигур смотреть в конце данного раздела;
5. найденные значения подставляем в формулы:

$$X_C = \frac{\sum A_k x_k}{\sum A_k}$$

$$Y_C = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k}$$

где  $A_1, A_2 \dots A_K$  - площади простых сечений,  
 $x_1, x_2 \dots x_K$ ,

$y_1, y_2 \dots y_K$  – координаты центра тяжести простых сечений;

1. значения  $X_C, Y_C$  откладываем от выбранных осей координат с учетом знака, т.е. от точки  $O$  в положительном направлении координаты со знаком «плюс» и в отрицательном направлении координаты со знаком «минус».

### Инструкция по выполнению практического занятия

- 1) выполнить рисунок тела, положение центра тяжести которого нужно определить. Так как все размеры тела обычно известны, при этом следует соблюдать масштаб;
- 2) разбить тело на составные части (отрезки линий или площади, или объемы), положение центров тяжести которых определяется исходя из размеров тела;
- 3) определить или длины, или площади, или объемы составных частей;

- 4) выбрать расположение осей координат;
- 5) определить координаты центров тяжести составных частей;
- 6) найденные значения длин или площадей, или объемов отдельных частей, а также координат их центров тяжести подставить в соответствующие формулы и вычислить координаты центра тяжести всего тела;
- 7) по найденным координатам указать на рисунке положение центра тяжести тела.

**Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.
3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.
5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

**Практическое занятие № 4 (2ч.)**

Определение параметров движения точки при координатном способе движения точки

**Учебная цель:** уметь определять положение точки при координатном способе задания движения точки

**Учебные задачи:**

1. Ознакомиться с методами движения точки
2. Уметь находить положение точки при координатном способе движения точки

**Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- находить положение точки при координатном способе движения точки

знать:

-методы движения точки

-методы нахождения положения точки при координатном способе движения точки

**Задачи практического занятия:**

1. Рассчитать положение точки в пространстве при разном задании движения точки

**Обеспеченность занятия:**

Раздаточные материалы (*карточки-задания, инструкционные карты*)

Ручка.

Карандаш простой

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия**

В выбранной системе координат задаются координаты движущейся точки как функции от времени. В прямоугольной декартовой системе координат это будут уравнения:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рисунок 1.3

Эти уравнения являются и уравнениями траектории в параметрической форме. Исключая из этих уравнений параметр  $t$ , можно получить три пары систем двух уравнений, каждая из которых представляет траекторию точки, как пересечение поверхностей.

Кроме декартовых могут быть использованы другие системы координат (сферическая, цилиндрическая). Всегда можно перейти от координатного способа задания движения к векторному (рисунок 1.3):

$$\vec{r}(t) = i x(t) \oplus j y(t) \oplus k z(t) \quad (1.5)$$

Поэтому, используя формулы для определения скорости и ускорения точки при векторном способе задания движения, можно получить аналогичные формулы для координатного способа:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dy}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

То есть:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \\ V &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Направление вектора скорости определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{V \vec{i}}) &= \frac{V_x}{V} \\ \cos(\widehat{V \vec{j}}) &= \frac{V_y}{V} \\ \cos(\widehat{V \vec{k}}) &= \frac{V_z}{V} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Формулы (1.6) и (1.7) полностью определяют вектор скорости при координатном способе задания движения точки, т.е. по величине и направлению.

Аналогичны формулы для определения ускорения точки:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{i} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}; \\ a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}; & \cos(\widehat{a \vec{i}}) &= \frac{a_x}{a}; \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}; & \cos(\widehat{a \vec{j}}) &= \frac{a_y}{a}; \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}; & \cos(\widehat{a \vec{k}}) &= \frac{a_z}{a}; \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \end{aligned} \quad (1.8)$$

Формулы (1.8) определяют величину и направление вектора ускорения. В формулах (1.6) и (1.8) приведены используемые в различных учебниках обозначения проекций скоростей и ускорений точек на оси декартовой системы координат.

### **Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:**

1. Координатный способ задания движения точки
2. Естественный способ задания движения точки
3. Как определить координаты движения точки в пространстве

### **Задания для практического занятия:**

1. сложное сечение разбиваем на простые, положение центра тяжести которых известно, либо легко может быть определено;
2. выбираем произвольно координатные оси. Если плоская фигура имеет ось симметрии, то рекомендуется провести одну из координатных осей вдоль оси симметрии. Так как центр тяжести  $S$  сечения лежит на оси симметрии (т.е. на одной из координатных осей), то необходимо определить лишь одну координату;
3. определяем площади простых сечений;
4. определяем координаты центров тяжести простых сечений относительно выбранных осей координат. Координаты центров тяжести простейших фигур смотреть в конце данного раздела;
5. найденные значения подставляем в формулы:

$$X_C = \frac{\sum A_k x_k}{\sum A_k}$$

$$Y_C = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k}$$

где  $A_1, A_2 \dots A_K$  - площади простых сечений,

$x_1, x_2 \dots x_K$ ,

$y_1, y_2 \dots y_K$  – координаты центра тяжести простых сечений;

2. значения  $X_C, Y_C$  откладываем от выбранных осей координат с учетом знака, т.е. от точки  $O$  в положительном направлении координаты со знаком «плюс» и в отрицательном направлении координаты со знаком «минус».

### **Инструкция по выполнению практического занятия**

1. составить расчетную схему
2. рассчитать положение точки при координатном способе задания движения точки
3. сделать вывод

### **Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.
3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.
5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### **Практическое занятие № 5 (2ч.)**

Решение задач динамики методом кинетостатики

**Учебная цель:** уметь решать задачи методом кинетостатики

**Учебные задачи:** уметь проводить расчеты методом кинетостатики.

### **Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- проводить расчеты методом кинетостатики.

знать:

- принцип Даламбера

- методы решения задач с силами инерции

**Задачи практического занятия:**

— определить реакции подпятника и подшипника во вращающемся вале.

**Обеспеченность занятия:**

Конспект лекций

Рабочая тетрадь (*обычная, в клетку*).

Раздаточные материалы (*карточки-задания, инструкционные карты*)

Ручка.

Карандаш простой

### Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Пусть несвободная материальная точка с массой  $m$  под действием задаваемых сил и сил реакций связей движется с некоторым ускорением  $\overset{u}{a}$ .

Следовательно можно записать:  $m \overset{u}{a} = \sum \overset{u}{F} + \sum \overset{u}{R}$

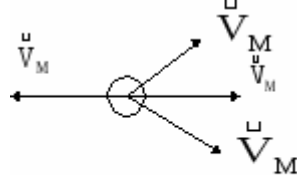


Рис. 93.

Перенесём инерционный член  $m \overset{u}{a}$  в правую часть. Получим:

$$\sum \overset{u}{F} + \sum \overset{u}{R} - m \overset{u}{a} = 0$$

Обозначим  $-m \overset{u}{a} = \overset{u}{\Phi}$ ; таким образом  $\sum \overset{u}{F} + \sum \overset{u}{R} + \overset{u}{\Phi} = 0$  (1)

Уравнение (1) по своему характеру является уравнением равновесия

сил и может быть решено методами статики. Замечаем, что условно введённая сила инерции направлена по линии ускорения в противоположную сторону.

Сформулируем метод кинетостатики для материальной точки:

*При неравномерном движении материальной точки в каждый момент времени геометрическая сумма задаваемых сил, сил реакции связей и силы инерции, условно приложенной к точке, взаимно уравновешена (равна нулю).*

Обычно векторное уравнение (1) записывают в проекциях на оси координат, например:

$$\sum F_x + \sum R_x + \Phi_x = 0$$

$$\sum F_y + \sum R_y + \Phi_y = 0$$

$$\sum F_z + \sum R_z + \Phi_z = 0$$

### § 2. Метод кинетостатики для твёрдых тел и механической системы.

а) При поступательном движении твёрдого тела

Как известно, поступательное движение тела описывается одним векторным уравнением, полученным на основе теоремы о движении центра масс:

$$m \overset{u}{a}_c = \sum \overset{u}{F}^e + \sum \overset{u}{R}$$

Выполним переход Даламбера, обозначив  $-m \overset{u}{a}_c = \overset{u}{\Phi}$

Таким образом:

$$\sum \overset{u}{F}^e + \sum \overset{u}{R} + \overset{u}{\Phi} = 0$$
 (2)

Или в проекциях на оси координат:

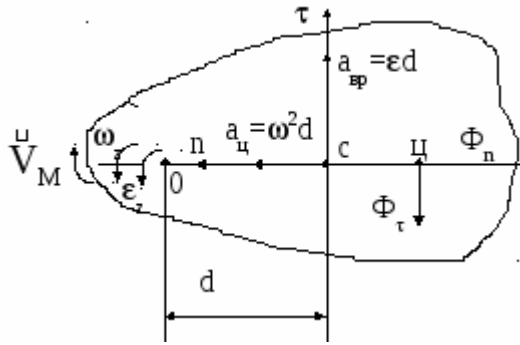
$$\sum F_x^e + \sum R_x + \Phi_x = 0$$

$$\sum F_y^e + \sum R_y + \Phi_y = 0$$

$$\sum F_z^e + \sum R_z + \Phi_z = 0$$

Получим: При неравномерном поступательном движении тела в каждый момент времени геометрическая сумма внешних сил, сил реакции связей и силы инерции, условно приложенной в центре масс, взаимно уравновешена.

б) При вращательном движении твёрдого тела.



Рассмотрим наиболее общий случай онервномерного вращения тела относительно неподвижной оси Z, не проходящей через центр тяжести. Пусть вращение характеризуется величинами  $\omega$  и  $\varepsilon$ ; расстояние между точками O и C равно d. В нашем случае дифференциальные уравнения тела запишутся:

$$M \ddot{a}_c = \sum \ddot{F}^e + \sum \ddot{R}^e$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = I_z \varepsilon_z = \sum M_z^{F^e} + \sum M_z^{R^e}$$

Примечание 1. В общем случае при вращении относительно нецентральной оси Z уравнения движения запишутся:

$$m \ddot{a}_c = \sum \sum F^e = \sum \ddot{F}^e + \sum \ddot{R}^e \quad (1)$$

$$I_c \varepsilon = \sum \sum M_c^e = \sum M_c^{F^e} + \sum M_c^{R^e} \quad (2)$$

Выше было показано, что уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$I_{z=\varepsilon} \sum \sum M_z^e = \sum M_z^{F^e} + \sum M_z^{R^e} \quad (2')$$

Выполним переход Даламбера, обозначив:

$$-M \ddot{a}_c = \ddot{\Phi}, \quad -I_z \frac{d\omega_z}{dt} = -I_z \ddot{\varepsilon}_z = M_z^{\Phi}$$

Таким образом:

$$\sum \ddot{F}^e + \sum \ddot{R}^e + \ddot{\Phi} = 0$$

$$\sum M_z^{F^e} + \sum M_z^{R^e} + M_z^{\Phi} = 0 \quad (3)$$

Получили: В любой момент времени:

- геометрическая сумма внешних сил, сил реакции связей и силы инерции, условно приложенной к центру масс вращающегося тела, уравновешивается;
- геометрическая сумма моментов внешних сил, моментов сил реакции связей и момента от силы инерции, условно приложенной к телу, относительно оси вращения, уравновешивается.

При использовании метода кинестатики для вращательного движения тела векторное уравнение сил целесообразно записывать в естественных осях:

$$\sum F_\tau^e + \sum R_\tau + \Phi_\tau = 0, \text{ где } \Phi_\tau = -m a_{\text{вп}} = -m \varepsilon_z d$$

$$\sum F_n^e + \sum R_n + \Phi_n = 0, \text{ где } \Phi_n = -m a_c = -m \omega_z^2 d$$

Поскольку момент от сил инерции относительно оси Z создается только касательной составляющей, то можно указать точку её приложения на линии O d:

$$\Phi_\tau * OЦ = M_z^{\Phi} \varepsilon \text{ или } m_z d OЦ = I_z \varepsilon_z$$

$$OЦ = \frac{I_z}{m d}$$

откуда  $OЦ = \frac{I_z}{m d}$

ε Легко заметить, что при вращении тела относительно оси Z, проходящей через центр тяжести тела (точку C) силы инерции в уравнение кинестатики не войдут, так как d=0. При равномерном движении тела ( $\varepsilon=0$ ) в уравнения кинестатики не войдёт момент от сил инерции.

в) При плоском движении твёрдого тела.

При плоском движении твёрдого тела его дифференциальные уравнения имеют вид:

$$m \ddot{a}_c = \sum \ddot{F}^e + \sum \ddot{R}$$

$$I_z \varepsilon = \sum M_z^{F^e} + \sum M_z^R$$

Выполняя переход Даламбера, обозначив  $-M \ddot{a}_c = \ddot{\Phi}$  и  $-I_z \varepsilon = M_z^{\Phi}$  будем иметь:

$$\sum \ddot{F}^e + \sum \ddot{R} + \Phi = 0$$

$$\sum M_z^F + \sum M_z^R + M_z^\Phi = 0 \quad (4)$$

В проекциях на оси координат система (4) запишется:

$$\sum F_x^e + \sum R_x + \Phi_x = 0$$

$$\sum F_y^e + \sum R_y + \Phi_y = 0$$

$$\sum M_z^F + \sum M_z^R + M_z^\Phi = 0$$

В заключение отметим, что в самом общем случае движения твёрдого тела и вообще механической системы в пространстве, заданном осями XYZ уравнения кинетостатики имеют вид:

$$\sum F_x^e + \sum R_x + \sum \Phi_x = 0$$

$$\sum F_y^e + \sum R_y + \sum \Phi_y = 0$$

$$\sum F_z^e + \sum R_z + \sum \Phi_z = 0$$

$$\sum M_x^F + \sum M_x^R + \sum M_x^\Phi = 0$$

$$\sum M_y^F + \sum M_y^R + \sum M_y^\Phi = 0$$

$$\sum M_z^F + \sum M_z^R + \sum M_z^\Phi = 0 \quad (4)$$

Если в системе уравнений (4) отбросить силы инерции и моменты от сил инерции, то получим обычные уравнения статики для пространственной системы сил. Найденные реакции в этом случае называются статическими реакциями. Если наоборот отбросить действующие силы и их моменты и определить реакции только от инерционных слагаемых, то получим динамические реакции. Решения системы (4) в полном объёме позволяют вычислять полные реакции механической системы.

#### **Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:**

1. Принцип нахождения сил инерции
2. Принцип Даламбера
3. Метод кинетостатики для твёрдых тел и механической системы
4. метод кинетостатики для материальной точки

ех заданных и вычисленных величин и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции (в своей задаче решение уравнений равновесия должно быть выполнено подробно).

**Ответ:**  $X_A = -11,8 \text{ Н}$ ,  $Y_A = 49,1 \text{ Н}$ ,  $X_B = -19,7 \text{ Н}$

#### **Инструкция по выполнению практического занятия**

1. Составить счетную схему
2. Определить направления реакций подшипника и подпятника
3. Составить уравнения
4. Рассчитать реакции методом кинетостатики

#### **Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.
3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.
5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

#### **Практическое занятие № 6 (2ч.)**

Расчет напряжений, при растяжении и сжатии, определение относительного удлинения

**Учебная цель:** Расчет напряжений, при растяжении и сжатии, определение относительного удлинения

**Учебные задачи:**

1. научиться определять напряжения
2. определение удлинения и укорочения детали при заданных нагрузках

**Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- определять деформации детали при заданных нагрузках

знать:

--методы нахождения удлинения и укорочения детали.

**Задачи практического занятия:**

– научиться определять деформации детали при заданных нагрузках

**Обеспеченность занятия:**

1. Конспект лекций
2. Рабочая тетрадь (*обычная, в клетку*).
3. Раздаточные материалы (*карточки-задания, инструкционные карты*)
4. Ручка.
5. Карандаш простой

Для конструкции и эпюры внутренних сил, построенных при выполнении практической работы № 5, материал – бронза,  $[\sigma] = 70$  МПа, запас прочности  $[s] = 1,5$ .

1. Установить опасное сечение бруса и записать условие прочности.
2. Определить размеры постоянного поперечного сечения бруса в форме квадрата, круга, прямоугольника, приняв  $h/b=2,0$ ;

*Цель работы* – научиться проводить проектировочные и проверочные расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.

**Теоретическое обоснование**

Основные типы расчетов на прочность

Используя условие прочности (5.3), можно решать следующие основные типы расчетов:

*Проектировочный расчет:*

- определение по известной нагрузке и допускаемому напряжению размеров поперечного сечения стержня

$$A_{\text{тр}} = \frac{N}{[\sigma]}, \quad (6.1)$$

- подбор материала

$$\sigma_{\text{пред}} \geq \frac{N[s]}{A_{\text{тр}}} \quad (6.2)$$

где  $A_{\text{тр}}$  - требуемая площадь сечения;

$N$  – продольная сила;

$[s]$ - допускаемый коэффициент запаса прочности;

$\sigma_{\text{пред}}$  - допускаемое напряжение.

*Проверочный расчет*

- проверка прочности стержня, т.е. определение по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения стержня фактических напряжений и сравнение их с допускаемыми.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (6.3)$$

*Определение максимальной нагрузки* по заданным размерам поперечного сечения и  $[s]$



$$N = [\sigma]A. \quad (6.4)$$

Величина деформации стержня  $\Delta L$  при растяжении или сжатии находится по формуле

$$\Delta L = \frac{NL}{EA}, \quad (6.5)$$

где  $L$  – длина стержня до нагружения;

$N$  – продольная сила;

$E$  – модуль упругости при растяжении, сжатии;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Условие жесткости при растяжении и сжатии

$$\Delta L \leq [\Delta L], \quad (6.6)$$

где  $L$  – продольная деформация стержня;

$[\Delta L]$  – допускаемая деформация.

Наиболее рациональным следует признать сечение, обладающее минимальной площадью при заданной нагрузке на брус. В этом случае расход материала на изготовление бруса, будет минимальным. Для получения бруса минимальной материалоемкости нужно стремиться к тому, чтобы по возможности наибольший объем материала работал при напряжениях, равных допускаемым или близким к ним. Прежде всего рациональное сечение бруса должно удовлетворять *условию равнопрочности растянутой и сжатой зон бруса*. Иными словами

необходимо, чтобы наибольшие напряжения растяжения ( $\max \sigma^p$ ) наибольшие напряжения сжатия ( $\max \sigma^c$ ) одновременно достигали допускаемых напряжений  $[\sigma^p]$  и  $[\sigma^c]$ .

#### **Порядок выполнения работы**

1. С помощью метода сечений по виду и расположению нагрузок, устанавливают вид внутренних силовых факторов, возникающих в поперечных сечениях бруса, и делают вывод о виде нагружения бруса.
2. С помощью метода сечений определяют значение и знак ВСФ во всех сечениях по длине бруса, строят их эпюры и отыскивают опасное сечение бруса.
3. По виду ВСФ устанавливают вид напряжения, возникающего в точках опасного сечения. Расчетное напряжение (максимальное напряжение в опасной точке опасного сечения бруса) определяют как отношение ВСФ к поперечному размеру.
4. Определяют размеры поперечных сечений.
5. Ответить на контрольные вопросы.

#### **Контрольные вопросы**

1. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении бруса при растяжении и сжатии?
2. Как распределяются по сечению силы упругости при растяжении и сжатии?
3. Какого характера напряжения возникают в поперечном сечении при растяжении и сжатии: нормальные или касательные?
4. Как распределены напряжения по сечению при растяжении и сжатии?
5. Запишите формулы для расчета нормальных напряжений при растяжении и сжатии.
6. Перечислите характеристики прочности.
7. В чем различие между предельным и допускаемым напряжениями?
8. Запишите условие прочности при растяжении и сжатии. Отличаются ли условия прочности при расчете прочности на растяжение и расчете на сжатие?

#### **Пример выполнения**

1. В заданном бруске два участка 1 и 2. Так как силы нагружающие брус, расположены по его центральной продольной оси, то в поперечных сечениях возникает лишь один

внутренний силовой фактор – продольная сила N, т. е. имеет место растяжение (сжатие) бруса.

- Сечение будет опасным, если напряженность  $\sigma$  будет наибольшей (без учета знака). По эпюре ( $\sigma$ ), видно, что опасное сечение 4 или 2, где  $|\sigma_{\max}|$ .
- Запишем условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{\max 2} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^2} = 15 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\max 4} = \frac{N_4}{A_4} = \frac{5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^2} = 25 \text{ МПа} \leq [\sigma]$$

- Определяем коэффициент запаса прочности:

$$[s]_2 = \frac{[\sigma]}{\sigma_{\max 2}} = \frac{70}{15} = 4,67 > 1,5; \quad [s]_4 = \frac{[\sigma]}{\sigma_{\max 4}} = \frac{70}{25} = 2,8 > 1,5$$

- Прочность бруса обеспечена, однако со значительной (более 25%) недогрузкой, что недопустимо из-за перерасхода материала. Из условия прочности определим новые рациональные размеры сечения каждого из участков бруса:

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} [s] = \frac{3 \cdot 10^3}{70} [1,5] = 64,3 \text{ см}^2; \quad A_4 = \frac{N_4}{[\sigma]} [s] = \frac{5 \cdot 10^3}{70} [1,5] = 107,1 \text{ см}^2$$

- Определяем размеры поперечного сечения бруса:

квадрат –  $a = \sqrt{A_2} = \sqrt{64,3} = 8,02 \text{ см}$

круг –  $d = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = 11,7 \text{ см}$ , округляем до  $d = 12,0 \text{ мм}$

$$A_2 = h \cdot b = 2b^2;$$

$$b = \sqrt{\frac{A_2}{2}} = \sqrt{\frac{64,3}{2}} = 5,68 \text{ см}, \quad h = 2 \cdot b = 11,36 \text{ см}$$

прямоугольник –

округляем  $b = 6,0 \text{ мм}$ ,  $h = 11,5 \text{ мм}$

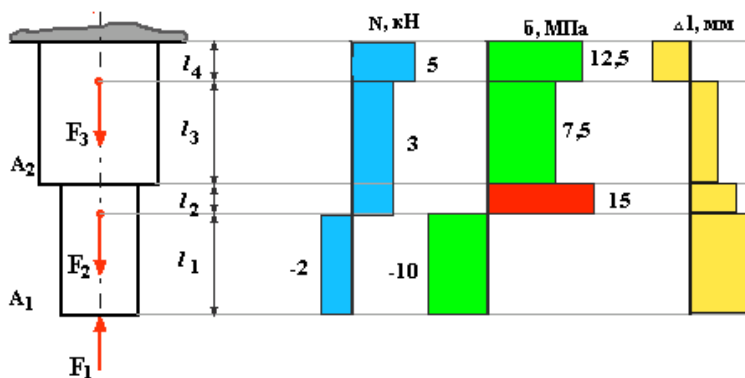
Аналогичные расчеты проводят для участка 4

- Проводим проверочный расчет:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{3 \cdot 10^3}{64,0} = 46,9 \text{ МПа} \leq 70 \text{ МПа}$$

- прочность обеспечена

Аналогичный расчет проводим для участка 4



## Практическое занятие № 7 (2ч.)

Построение эпюр продольных сил и нормальных напряжений при растяжении и сжатии.

**Учебная цель:** Построение эпюр продольных сил и нормальных напряжений при растяжении и сжатии, определение перемещений

**Учебные задачи:**

3. научиться определять напряжения
4. научиться строить эпюры
5. определение удлинения и укорочения детали при заданных нагрузках

**Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- определять деформации детали при заданных нагрузках

знать:

- правила построения эпюр внутренних сил

- методы нахождения удлинения и укорочения детали.

**Задачи практического занятия:**

— научиться определять деформации детали при заданных нагрузках

**Обеспеченность занятия:**

Рабочая тетрадь (*обычная, в клетку*).

Раздаточные материалы (*карточки-задания, инструкционные карты*)

Ручка.

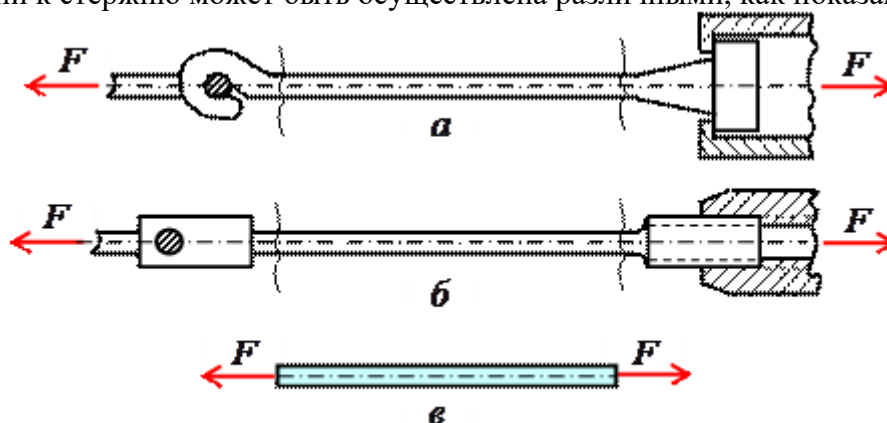
Карандаш простой

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия**

Под *растяжением (сжатием)* понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только продольные силы  $N$ , а прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Это самый простой и часто встречающийся вид деформации. Обычно он наблюдается когда внешняя нагрузка действует вдоль продольной оси стержня. *Продольной осью* стержня называется линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений.

Обычным является растяжение стержня силами, приложенными к его концам. Передача усилий к стержню может быть осуществлена различными, как показано на рис 2.1 .



Во всех случаях, однако, система внешних сил образует равнодействующую  $F$ , направленную вдоль оси стержня. Поэтому независимо от условий крепления растянутого стержня, расчетная схема в рассматриваемых случаях (рис. 2.1, а, б) оказывается единой (рис. 2.1, в) согласно принципу Сен – Венана.

Если воспользоваться методом сечений (рис. 2.2), то становится очевидным, что во всех поперечных сечениях стержня возникают нормальные силы  $N_z$ , равные силе  $F$  (рис. 2.2, б).

Сжатие отличается от растяжения, формально говоря, только знаком силы  $N_z$ . При растяжении нормальная сила  $N_z$  направлена от сечения (рис. 2.2, б), а при сжатии – к сечению.

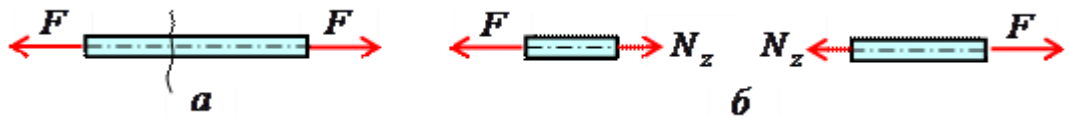


Рис. 2.2

Растягивающие продольные силы принято считать **положительными** (рис. 2.3, а), а сжимающие – **отрицательными** (рис. 2.3, б).

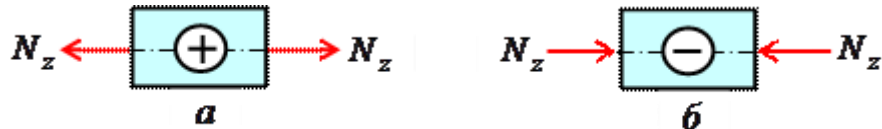


Рис. 2.3

Вместе с тем между растяжением и сжатием могут обнаружиться и качественные различия, как, например, при изучении процессов разрушения материала или при исследовании поведения длинных и тонких стержней, для которых сжатие сопровождается, как правило, изгибом.

При расчете стержней, испытывающий деформацию растяжения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи. Это определение напряжений (от  $N_z$ ), возникающих в стержне, и нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

Продольные силы ( $N_z$ ), возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений.

График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется **эпюрой продольных сил** (эп.  $N_z$ ). Он дает наглядное представление о законе изменения продольной силы.

Осью абсцисс служит ось стержня. Каждая ордината графика – продольная сила (в масштабе сил) в данном сечении стержня.

Эпюра позволяет определить, в каком сечении действует максимальное внутреннее усилие (например, найти  $N_{\max}$  при растяжении-сжатии). Сечение, где действует максимальное усилие будем называть **опасным**.

Перед построением эпюр необходимо освободить брус, в котором будем строить эпюры от опорных связей (выделить объект равновесия) и приложить к нему все действующие внешние силы (активные и реактивные). Затем необходимо установить границы участков, в пределах которых закон изменения внутренних сил постоянный. Границами таких участков являются сечения, где приложены сосредоточенные силы или начинается и кончается распределенная нагрузка, а также сечения, где имеется перелом стержня.

Применяя метод сечений и учитывая правила знаков изложенные выше, получаем уравнения изменения внутренних сил в пределах длины каждого участка бруса. Затем, используя, полученные зависимости строим графики (эпюры) этих усилий. Ординаты эпюр в определенном масштабе откладываем от базисной линии, которую проводим параллельно оси бруса.

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, жестко защемленный правым концевым сечением и нагруженный заданной внешней сосредоточенной нагрузкой  $F$  и распределенной  $q$  (рис. 2.4, а).

Прежде всего определим опорную реакцию  $R_1$ , задавшись ее направлением вдоль оси  $z$ .

$$\Sigma F_z = 0, \quad -R_1 - 22 + 24 \cdot 0,6 = 0, \quad R_1 = -7,6 \text{ кН.}$$

Знак минус говорит о том, что действительное направление опорной реакции  $R_1$  противоположно показанному на рис. 2.4, а. Исправляем его и в дальнейших расчетах знак минус у опорной реакции  $R_1$  не учитываем (рис. 2.4, б, в).

Под *участком* будем понимать часть стержня, на которой  $N_z$  представляется некоторым аналитическим выражением. На другом участке  $N_z$  будет определяться другой функцией.

Границами участка являются начало и конец стержня, сечения, где приложены сосредоточенные нагрузки, начинается и заканчивается распределенная нагрузка.

В нашем случае стержень разбивается на два участка. В пределах первого участка мысленно рассечем стержень на две части нормальным сечением (рис. 2.4, б, в).

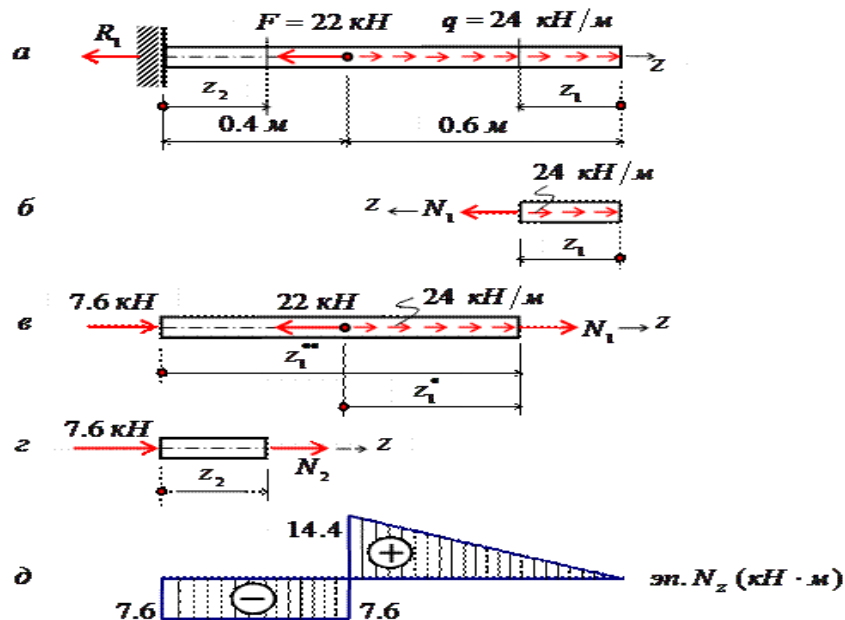


Рис. 2.4

Направления продольных сил (рис. 2.4, б – в) приняты в предположении, что они являются растягивающими (т. е. положительными). Если в результате расчета значение  $N_i$  получится со знаком «минус», то это будет означать, что в действительности стержень в этом сечении сжат.

Поскольку обе части стержня являются равноправными, то  $N_1$  на первом участке в сечении, определяемом координатой  $z_1$ , можно определить рассматривая равновесие его правой (рис. 2.4, б) либо левой (рис. 2.4, в) частей.

В нашем случае для определения  $N_1$  *предпочтительнее* рассмотреть равновесие правой части – к ней приложено меньше сил (рис. 2.4, б). Начало координат совмещаем с правым концевым сечением первого участка. Ось  $z$  направляем налево. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси  $0 \leq z_1 \leq 0,6$  м. Спроектируем все силы, действующие на правую часть, на продольную ось.

$$\sum F_z = 0, \quad N_1 - 24 \cdot z_1 = 0, \quad N_1 = 24 \cdot z_1, \quad N_1(0) = 0, \quad N_1(0,6) = 14,4 \text{ кН.}$$

Поскольку функция  $N_1 = 24 \cdot z_1$  получилась линейная, то для построения графика ее изменения вдоль продольной оси (эп.  $N_z$ ) достаточно вычислить значения продольной силы на границах первого участка, отложить их перпендикулярно продольной оси вверх (стержень растянут) и провести через них прямую линию (рис. 2.4, д).

Таким образом, в пределах первого участка стержень растянут и нормальная сила изменяется по линейному закону.

Этот же результат можно получить, рассматривая равновесие левой части стержня.

Здесь при выборе системы координат рассмотрим два варианта. При первом варианте начало координат совмещаем с левым концевым сечением второго участка. Ось  $z$  направляем направо. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси  $0,4 \text{ м} \leq z_1^* \leq 1,0$  м. Спроектируем все силы, действующие на левую часть, на продольную ось.

$$\sum F_z = 0, \quad N_1 + 7,6 - 22 + 24 \cdot (z_1^* - 0,4) = 0, \quad N_1 = 24 - 24 \cdot z_1^*, \quad N_1(0,4) = 14,4 \text{ кН}, \quad N_1(1,0) = 0.$$

Во втором варианте введем скользящую систему координатных осей. Начало координат совмещаем с левым концевым сечением первого участка. Ось  $z$  направляем направо. Пределы изменения положения сечения вдоль продольной оси  $0 \leq z_1^* \leq 0,6$  м. Имеем

$$\Sigma F_z=0, N_1+7,6-22+24\cdot z_1=0, N_1=14,4-24\cdot z_1, N_1(0)=14,4 \text{ кН}, N_1(0,6)=0.$$

Заметим, что при выборе скользящей системы координат, функция  $N_1=f(z, q)$  меняется от нуля, что делает последующие расчеты менее трудоемкими.

Сравнивая все три варианта определения  $N_1$ , приходим к выводу, что когда мы оставляем ту часть стержня, к которой приложено меньше внешних нагрузок, то расчеты оказываются более простыми.

При некотором навыке можно сразу составить выражение для  $N_1$ , не изображая отдельные части бруса, на которые он расчленяется поперечными сечениями (рис. 2.4, б, в). Например,

$$\text{при } 0 \leq z_1 \leq 0,6 \text{ м, } N_1 = 24 \cdot z_1;$$

$$\text{при } 0,4 \text{ м} \leq z_1 \leq 1,0 \text{ м, } N_1 = 7,6 + 22 - 24 \cdot (z_1 - 0,4);$$

$$\text{при } 0 \leq z_1 \leq 0,6 \text{ м, } N_1 = -7,6 + 22 - 24 \cdot z_1.$$

Таким образом, на основании метода сечений *продольная сила в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения, на его продольную ось.*

Причем проекция внешней силы берется со знаком плюс, если сила растягивает часть стержня от точки ее приложения до рассматриваемого сечения и, наоборот, со знаком минус – если сжимает.

Осталось определить значение продольной силы  $N_2$  в произвольном сечении, определяемом координатой  $z_2$ , на втором участке (рис. 2.4, з). Так как продольная сила  $N_2$  численно равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к стержню слева от сечения (рассматриваем равновесие левой части стержня), то  $N_2 = -7,6$  кН (реакция  $R_1 = 7,6$  кН сжимает часть стержня длиной  $z_2$ ). Здесь принимаем скользящую систему координат, с началом в левом концевом сечении второго участка. Ось  $z$  направляем направо.

Эпюра  $N_z$  на втором участке представлена на рис 2.4, д в виде прямоугольника со знаком минус, поскольку  $N_2 = -7,6$  кН = const. Таким образом, в пределах второго участка стержень претерпевает сжатие постоянной нормальной силой.

Каждая ордината эп.  $N_z$  (рис. 2.4, д) в принятом масштабе равна величине продольной силы, действующего в том поперечном сечении стержня, которому соответствует эта ордината.

Видно, что на участке между точками приложения сосредоточенных сил  $R_1$  и  $F$  продольная сила имеет постоянное значение, а на участке, где приложена распределенная внешняя нагрузка, меняется по линейному закону (рис. 2.4, д).

Характерно, что скачки на эп.  $N_z$  обусловлены наличием в соответствующих сечениях сосредоточенных сил  $R_1$  и  $F$ .

Рассмотрим несколько примеров определения внутренних сил.

### Пример 1.

Пусть имеется стержень постоянного поперечного сечения, нагруженный силами  $2P$  и  $3P$  вдоль продольной оси стержня, показанный на рис.2.4.1. Определить величину внутренних сил.

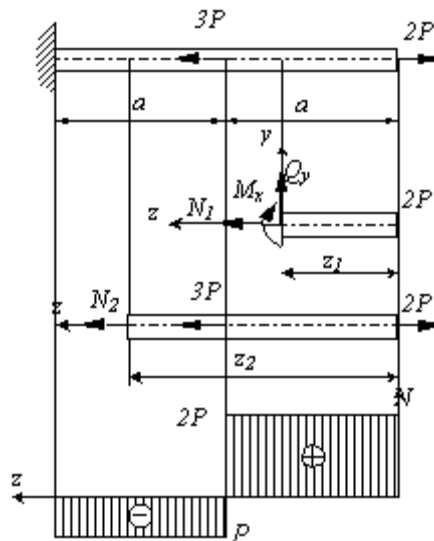


Рис.2.4.1

**Решение.**

Стержень может быть разделен на два участка, граничными точками которых являются точки приложения сосредоточенных сил и точка закрепления. Если начало координат расположить на правом конце стержня, а ось  $z$  направить справа налево, то, используя метод сечений, **рассекая** последовательно участки, **отбрасывая** левую часть, **заменяя** ее действие внутренними усилиями  $N$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$  и **уравновешивая** оставшуюся часть, получим:

I участок:  $0 \leq z_1 \leq a$

$$\Sigma z = 0, \quad N_1 = 2P;$$

$$\Sigma y = 0, \quad Q_y = 0;$$

$$\Sigma m_x = 0, \quad M_x = 0$$

Как видно, при растяжении в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор - нормальная сила  $N$ .

II участок:  $a \leq z_2 \leq 2a$

$$\Sigma z = 0, \quad N_2 = 2P - 3P = P.$$

Таким образом, нормальная сила равна алгебраической сумме проекций сил, приложенных к отсеченной части на продольную ось  $N = \Sigma P_{iz}$ .

Полученные результаты для большей наглядности удобно представить в виде графика, (эпюры  $N$ ), показывающего изменение продольной силы вдоль оси стержня (рис.2.4.1). Построим на первом участке линию параллельную оси  $z$  на высоте  $2P$ , на втором участке – линию со значением  $-P$ . Области ограниченные графиком и осью  $z$  принято штриховать и обозначать знак этой области. Видно, что наибольшая продольная сила возникает на первом участке стержня и, как следствие, при прочих равных условиях, он скорее может разрушиться, чем второй участок.

**Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:**

- Какой вид нагружения стержня называются осевым растяжением (сжатием)?
- Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении бруса при растяжении и сжатии?
- Дайте определение эпюры внутреннего силового фактора.
- Какой вид нагружения стержня называется растяжением (сжатием)?
- Какие нагрузки называют распределенными? Указать размерности различных внешних сил (в системе СИ).

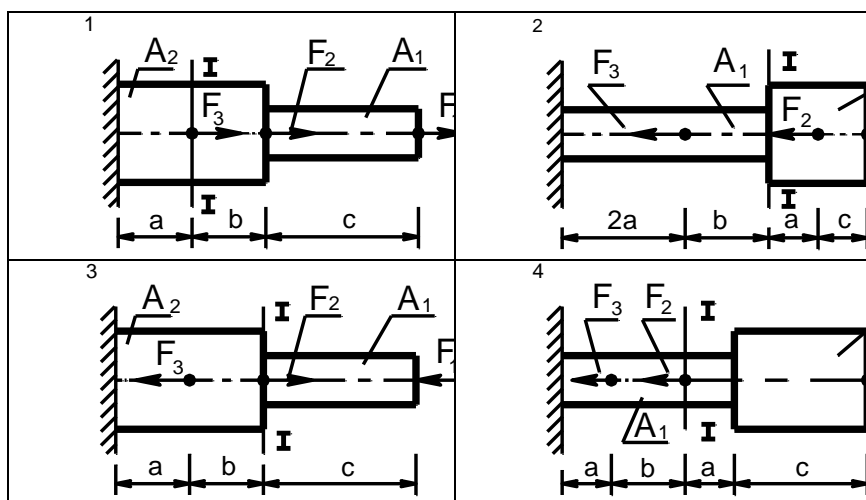
- Как вычисляется значение продольной силы  $N$  в произвольном поперечном сечении бруса?
- Что представляет собой эпюра продольных сил и как она строится?

**Задания для практического занятия:**

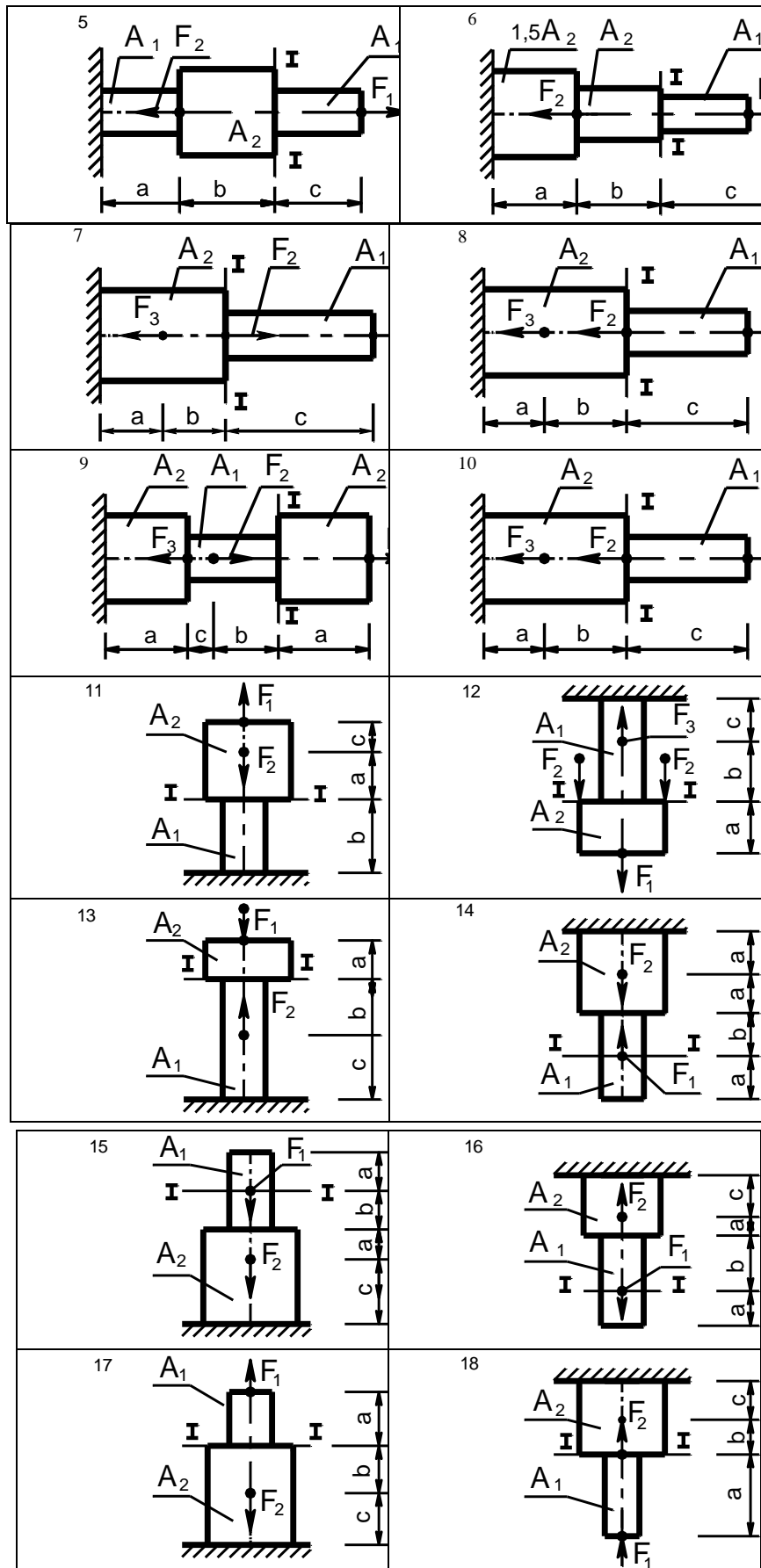
Таблица исходных данных

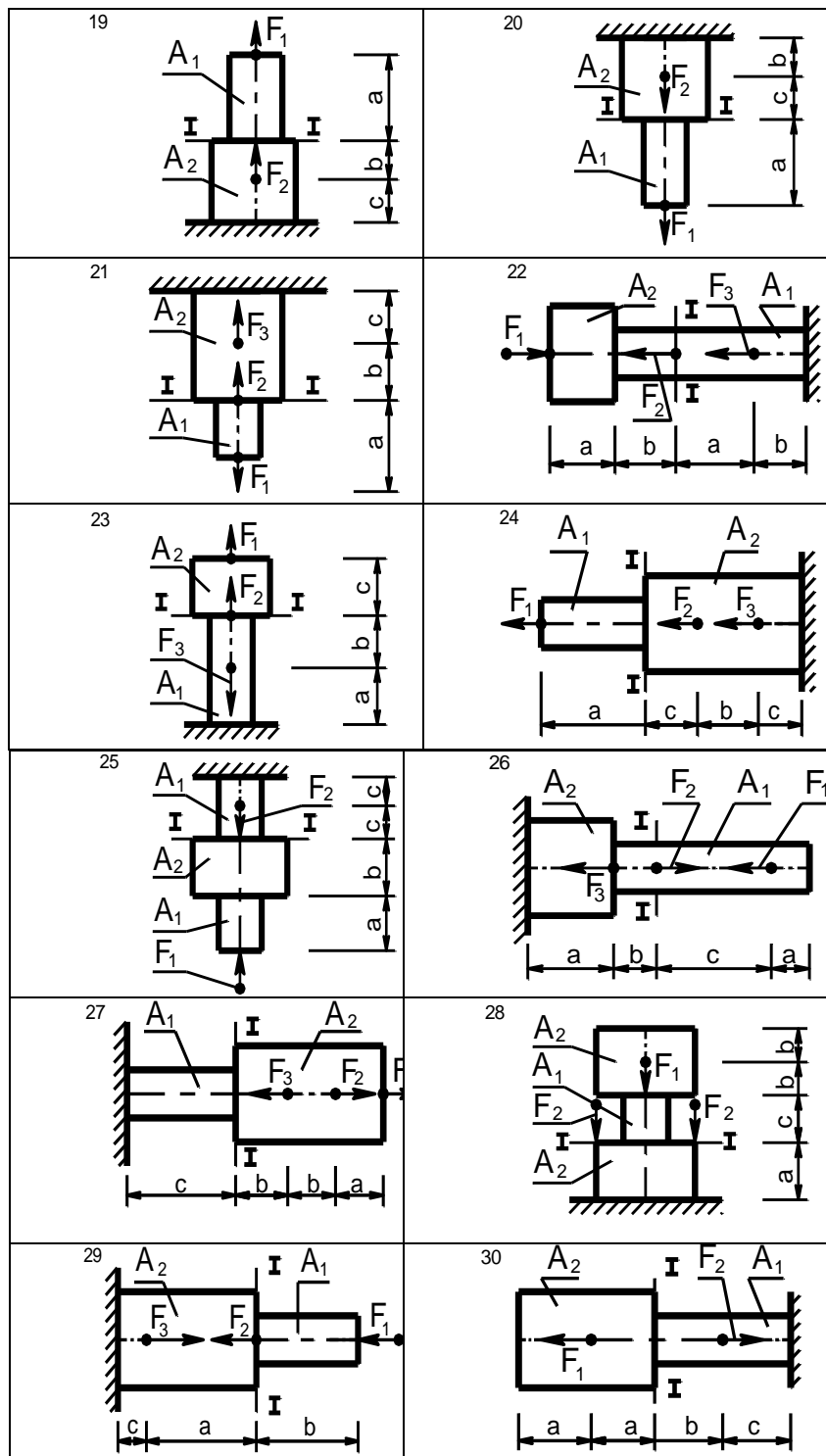
№ р. сх.	a	b	C	F			A	
				1	2	3	1	2
	м	м	м	кН	кН	кН	сМ <sup>2</sup>	сМ <sup>2</sup>
1	0,4	0,6	0,3	10	60	30	4	6
2	0,2	0,4	0,6	30	100	60	5	10
3	0,6	0,2	0,8	50	200	40	4	5
4	0,8	0,6	0,4	70	300	100	5	8
5	0,4	0,8	0,5	20	500	80	2	4
6	0,5	0,3	0,7	40	700	200	4	2
7	0,7	0,5	0,2	30	800	200	3	5
8	0,3	0,7	0,1	60	400	700	6	8
9	0,8	0,4	0,6	80	200	400	4	6
10	0,3	0,5	0,2	20	600	300	2	5

Таблица 1









### Инструкция по выполнению практического занятия

Для заданной расчетной схемы ступенчатого стального бруса требуется:

1. Построить эпюры «N», « $\sigma$ »;
2. Проверить прочность бруса;
3. Определить перемещение сечения I - I;
4. Построить эпюру перемещений « $\delta$ ».

Принять  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

### Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.

3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.
5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### Практическое занятие № 8 (2ч.)

Расчёт на прочность при кручении

**Учебная цель:** уметь проводить расчеты при деформации кручения

**Учебные задачи:**

- Уметь проводить расчеты и строить эпюры при кручении.

**Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- проводить практические расчеты на кручение

знать:

- правила расчета детали на кручение

**Задачи практического занятия:**

- Научиться рассчитывать детали на кручение
- Определять допустимую нагрузку при заданных данных

**Обеспеченность занятия:**

Конспект лекций

Рабочая тетрадь (*обычная, в клетку*).

Раздаточные материалы (*карточки-задания, инструкционные карты*)

Ручка.

Карандаш простой

### Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Прочность при кручении бруса круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения определяется условием

$$\tau = M_K / W_p \leq [\tau_K].$$

Эта формула может служить основой для трех видов расчетов.

1. **Проверка прочности** (проверочный расчет), когда известны наибольший крутящий момент и размеры поперечного сечения вала.

2. **Подбор сечения** (проектный расчет). Решив это неравенство относительно  $W_p$ , получим формулу для определения полярного момента сопротивления, а значит диаметра вала, исходя из условия прочности

$$W_p \geq M_K / [\tau_K]$$

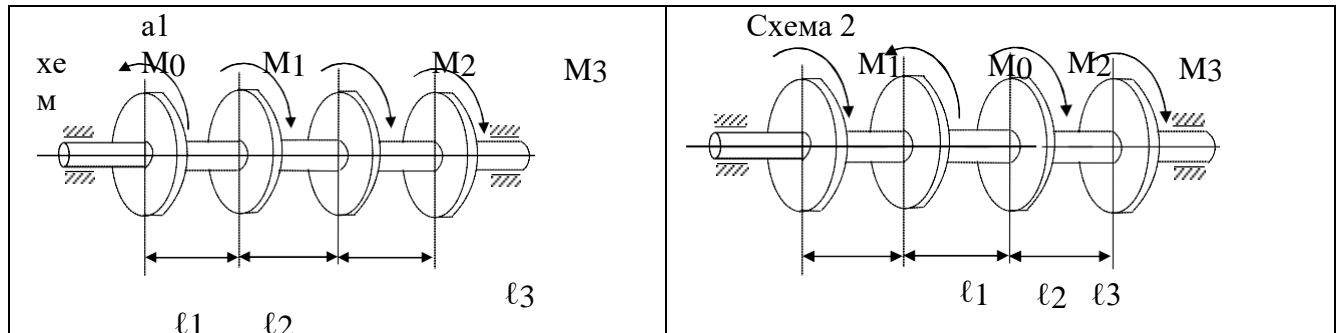
3. **Определение допускаемого крутящего момента**, когда известны размеры сечения вала и задано допускаемое напряжение,

$$[M_K] = W_p [\tau_K].$$

Кроме соблюдения условия прочности при проектировании валов требуется, чтобы вал обладал достаточной жесткостью, т. е. чтобы угол закручивания не превосходил некоторой заданной величины. Так, в зубчатых передачах при значительных углах закручивания валов зубья колес перекашиваются. Следствием может быть выкрашивание поверхностей зубьев и поломка передачи, поэтому необходимая жесткость валов практически всегда должна быть обеспечена. Обозначив через  $\theta$  угол закручивания единичной длины вала, можно составить расчетную формулу для проверки вала на жесткость:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_R}{GJ_p} \ll [\theta].$$

Если вычислить относительный угол закручивания в градусах на 1 м длины вала, получим



$$\theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\theta^\circ]$$

С помощью этих формул решаются три задачи, аналогичные задачам расчета на прочность:

1. Проверка жесткости (проверочный расчет), когда заданы крутящий момент, размеры и материал вала, а также допускаемый угол закручивания.
2. Подбор сечения по условию жесткости (проектный расчет). Из

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_R}{GJ_p} \ll [\theta].$$

неравенства

получим формулу для определения полярного момента инерции сечения вала, по условию жесткости

$$J_p \geq \frac{M_R}{G[\theta]}$$

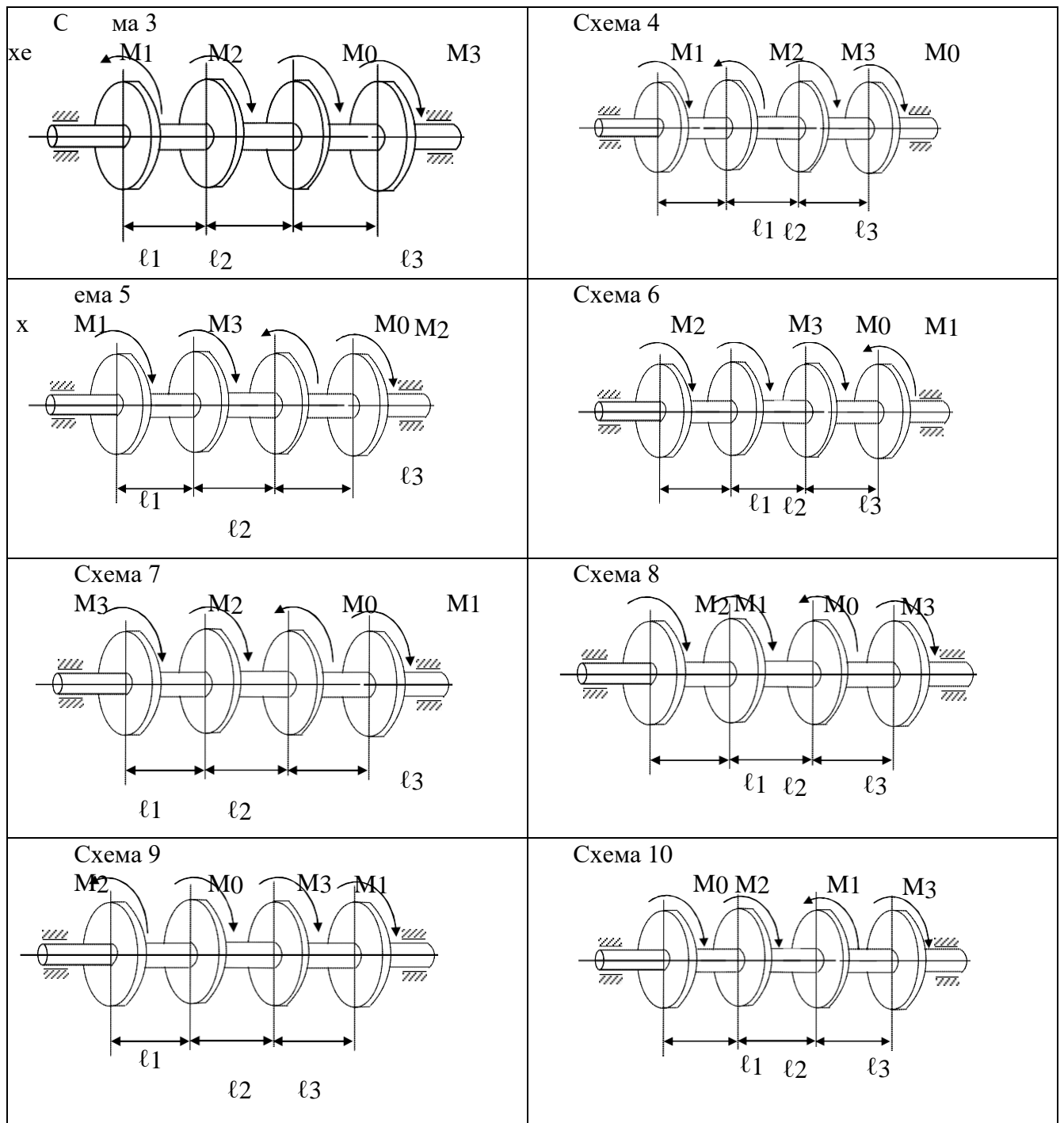
3. Определение допускаемого крутящего момента по условию жесткости

$$[M_k] = GJ_p[\theta]$$

**Вопросы для закрепления теоретического материала к лабораторному занятию:**

1. Кручение – это...
2. Напряжения, возникающие при кручении
3. Прочность и жесткость при кручении
4. Определение допускаемого крутящего момента

**Задания для практического занятия:**



Рисунки со схемой вала к таблице

### Инструкция по выполнению практического занятия

1. При построении эпюры крутящих моментов принять, что  $M_0=M_1+M_2+M_3$  или  $P_0=P_1+P_2+P_3$ .
2. Определение крутящих моментов.
3. Определение диаметров ступеней вала.
4. Определение угла закручивания.
5. Строим расчетную схему
6. Строим эпюры
7. Полученное по расчету значение диаметра вала (мм) следует округлить до ближайшего большего, оканчивающегося на 0, 2, 5, 8.

### Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.
3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.
5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### Практическое занятие № 9 (2ч.)

Расчёт балок на прочность при изгибе

**Учебная цель:** уметь проводить расчеты балок на прочность при изгибе

**Учебные задачи:**

- Уметь проводить расчеты и строить эпюры при изгибе

### Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:

Студент должен

уметь:

- проводить практические расчеты на изгиб

знать:

- правила расчета детали на изгиб

**Задачи практического занятия:**

- Научиться рассчитывать детали на изгиб
- Определять допустимую нагрузку при заданных данных

**Обеспеченность занятия:**

1. Конспект лекций
2. Рабочая тетрадь (*обычная, в клетку*).
3. Раздаточные материалы (*карточки-задания, инструкционные карты*)
4. Ручка.
5. Карандаш простой

### Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

где  $\sigma_{max}$  – наибольшее по модулю напряжение в поперечном сечении;  $M_x$  – изгибающий

момент;  $W_x = \frac{I_x}{|y_{max}|}$  – осевой момент сопротивления;  $[\sigma]$  – допускаемые нормальные напряжения.

Условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{max} = \frac{Q_y S_x^{омс}}{bI_x} \leq [\tau]$$

где  $\tau_{max}$  – наибольшее по модулю напряжение в поперечном сечении;  $[\tau]$  – допускаемые касательные напряжения.

Если для материала балки заданы различные допускаемые нормальные напряжения при растяжении и сжатии, то условия прочности применяют отдельно к наиболее растянутым и к наиболее сжатым волокнам балки.

**Пример 6.2.** Для балки (рис. 6.11, а) необходимо:

· проверить прочность при  $b = 6$  см,  $F = 15$  кН,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $[\tau] = 80$  МПа;

· определить допускаемую величину силы  $F$ ;

· подобрать размер  $t$  коробчатого поперечного сечения при  $F = 15$  кН.

Строим эпюры внутренних усилий (рис. 6.11, в, г). Для прямоугольного поперечного сечения вычисляем момент сопротивления

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 12^2}{6} = 144 \text{ см}^3.$$

Проверяем условие прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} = \frac{2,1 \cdot 15 \cdot 100}{144} = 21,9 \text{ кН/см}^2 = 219 \text{ МПа} > [160]$$

Проверяем условие прочности по касательным напряжениям

$$\tau_{max} = \frac{1,5 Q}{bh} = \frac{1,5 \cdot 2,5 \cdot 15}{6 \cdot 12} = 0,78 \text{ кН/см}^2 = 7,8 \text{ МПа} < [80]$$

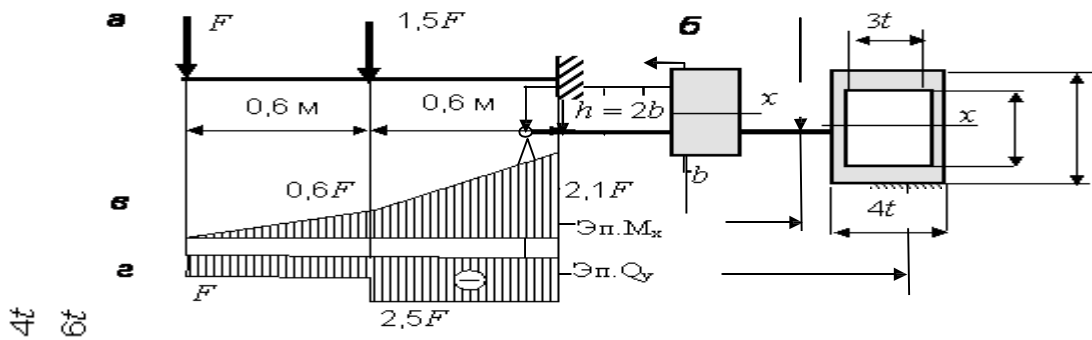


Рис. 6.11. Расчет балки на прочность: *a* – схема балки; *б* – формы поперечного сечения; *в* – эпюра изгибающих моментов; *г* – эпюра поперечных сил

По касательным напряжениям прочность балки обеспечена, а по нормальным напряжениям – нет.

Определяем, какую нагрузку может выдержать балка при заданных размерах поперечного сечения. Наибольший изгибающий момент  $M_x^{max} = 2,1F$  подставляем в условие

$$\sigma_{max} = \frac{2,1F}{W_x} = \frac{2,1F \cdot 100}{144} \leq [16] \quad F \leq \frac{16 \cdot 144}{210} = 11 \text{ кН}$$

прочности, откуда получаем

Для определения размера  $t$  коробчатого поперечного сечения вначале находим его момент инерции как разность моментов инерции внешнего и внутреннего прямоугольников. Затем получаем выражение для момента сопротивления, которое подставляем в условие прочности, откуда получаем  $t = 2,2$  см.

### Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что такое чистый изгиб
2. Что такое поперечный изгиб
3. Правила построения эпюр при изгибе
4. Определение максимального напряжения

### Задания для практического занятия:

Подобрать сечение двутавра для заданной балки.

### Инструкция по выполнению практического занятия

Для заданной расчетной схемы бруса требуется:

1. Построить эпюры
2. Проверить прочность бруса;

**Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.
3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.
5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### Практическое занятие № 10 (2ч.)

Расчет на прочность при совместном действии изгиба и кручении



**Учебная цель:** уметь проводить расчеты балок на прочность при кручении и изгибе

**Учебные задачи:**

– Уметь проводить расчеты и строить эпюры при изгибе

**Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- проводить практические расчеты на изгиб и кручение одновременно

знать:

- правила расчета детали на изгиб и кручение

**Задачи практического занятия:**

– Научиться рассчитывать детали на изгиб и кручение

– Определять допустимую нагрузку при заданных данных

**Обеспеченность занятия:**

Конспект лекций

a. Рабочая тетрадь (*обычная, в клетку*).

b. Раздаточные материалы (*карточки-задания, инструкционные карты*)

c. Ручка.

d. Карандаш простой

### Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения, нагруженный внешней нагрузкой (рис. 5.5). При указанной нагрузке в поперечном сечении стержня будут возникать:

от действия силы  $F_x$  – поперечная сила  $Q_x$  и изгибающий момент  $M_y$ ;

от действия силы  $F_y$  – поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ ;

от действия скручивающего момента  $M_z$  – крутящий момент  $T$ .

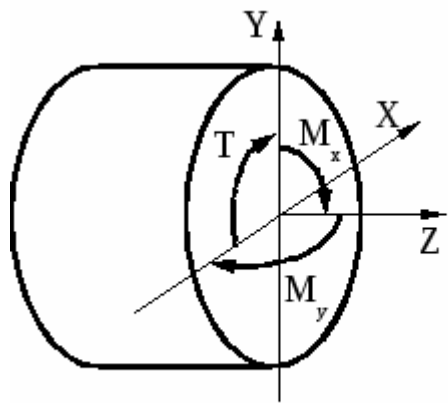


Рис. 5.6

Практика расчета на прочность показывает, что для стержня круглого поперечного сечения поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$  не оказывают существенного влияния на оценку прочности и с целью упрощения расчета ими можно пренебречь. Вид нагружения, при котором в поперечном сечении стержня действуют крутящий и изгибающий (изгибающие) моменты (рис. 5.6), называется изгибом с кручением.

При изгибе с кручением в каждой точке поперечного сечения стержня действуют напряжение кручения  $\tau$  и напряжение изгиба

$\sigma$ . При изучении кручения было установлено, что максимальные напряжения кручения возникают в точках наружной поверхности стержня и определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}, \quad (5.6)$$

где  $T$  – крутящий момент в сечении;  $W_p$  – полярный момент сопротивления сечения.

При рассмотрении косоугольного изгиба было получено, что при одновременном действии в сечении изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  напряжение изгиба равно

(5.7)

где  $M_x, M_y$  – изгибающие моменты;  $I_x, I_y$  – осевые моменты инерции сечения;  $x, y$  – координаты точки, в которой определяется напряжение.

Для стержня круглого поперечного сечения

$$I_x = I_y = I. \quad (5.8)$$

С учетом (5.8) формула (5.7) принимает вид

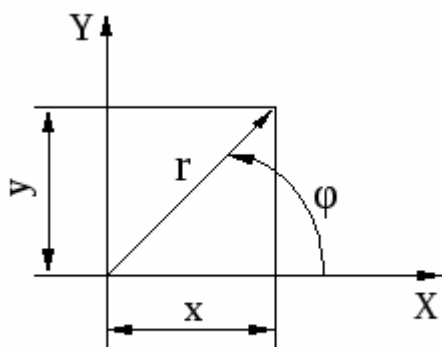


Рис. 5.9

$$\sigma = \frac{M_x y + M_y x}{I} \quad (5.9)$$

Перейдем от прямоугольной системы координат к полярной системе координат (рис. 5.7). Взаимосвязь координат  $x, y$  и  $r, \varphi$  определяется соотношениями

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi. \quad (5.10)$$

Подставив (5.10) в (5.9), находим

$$\sigma = \frac{M_x \sin \varphi + M_y \cos \varphi}{I} r. \quad (5.11)$$

Из формулы (5.11) следует, что наибольшее напряжение изгиба действует в точках наружной

поверхности стержня и равно

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x \sin \varphi + M_y \cos \varphi}{I} r_{\max} = \frac{M_x \sin \varphi + M_y \cos \varphi}{W}, \quad (5.12)$$

где  $W$  – осевой момент сопротивления сечения.

Определим максимальное напряжение изгиба. Выполнив дифференцирование (5.12) по  $\varphi$ , будем иметь

$$\frac{d\sigma_{\max}}{d\varphi} = \frac{1}{W} (M_x \cos \varphi^* - M_y \sin \varphi^*) = 0;$$

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M_x}{M_y}. \quad (5.13)$$

Выразив в (5.12) тригонометрические функции через функцию тангенса

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

и используя (5.13), находим

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} = \frac{M_{\text{сум}}}{W}, \quad (5.14)$$

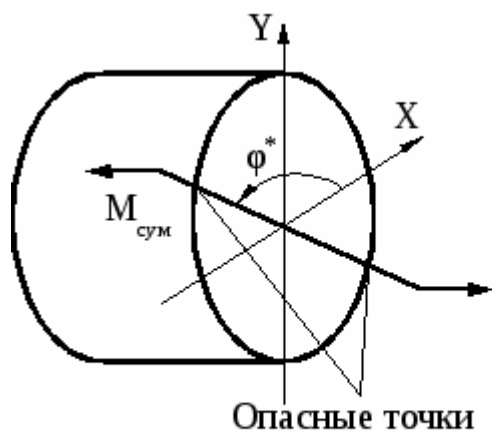


Рис. 5.13

где  $M_{\text{сум}}$  – суммарный изгибающий момент.

Таким образом, при изгибе с кручением опасными являются точки, расположенные на наружной поверхности стержня в плоскости действия суммарного изгибающего момента (рис. 5.10). Положение данной плоскости определяется углом  $\varphi^*$ , который находится по зависимости (5.13).

При одновременном действии в сечении нормальных и касательных напряжений оценка прочности выполняется по эквивалентному напряжению

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (5.15)$$

Подставив (5.6) и (5.14) в (5.15) и

учитывая, что для круглого поперечного сечения

$$W_p = 2W,$$

получаем

$$\sigma_3 = \frac{\sqrt{M_{\text{сум}}^2 + T^2}}{W} = \frac{M_3}{W}, \quad (5.16)$$

где  $M_э$ – эквивалентный изгибающий момент.

Расчет на прочность выполняется для опасного сечения. Опасным является сечение, в котором эквивалентный изгибающий момент достигает максимального значения. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{э\max} = \frac{M_{э\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (5.17)$$

Перед расчетом вала необходимо составить его расчетную схему. Для того чтобы получить расчетную схему нужно привести силы, действующие на диски (зубчатые колеса, шкивы, звездочки), расположенные на валу, к оси вала.

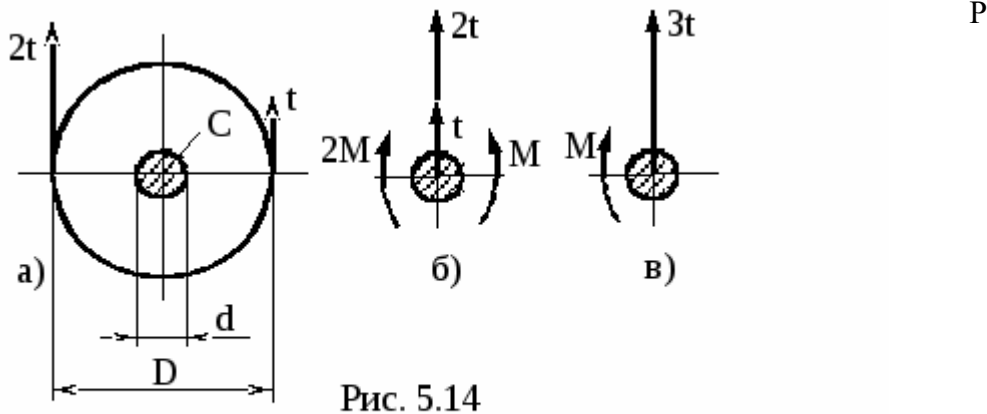


Рис. 5.14

рассмотрим приведение сил, действующих на шкив (звездочку) (рис. 5.14а).

Приведем усилия натяжения  $t$  и  $2t$  тремня (цепи) к оси  $C$  вала диаметром  $d$  в месте посадки шкива (звездочки) с диаметром  $D$ . Из курса теоретической механики известно, что при параллельном переносе силы появляется момент, равный произведению силы на наименьшее расстояние между ее старой и новой линиями действия. В нашем случае в результате переноса силы  $2t$  появляются моменты  $M$  и  $2M$  (рис 5.14б), где  $M=tD/2$ .

Заменяя подобные силы (моменты) их равнодействующими, получим, что в месте посадки шкива на вал действует сила  $3t$  и скручивающий момент  $M$  (рис.5.14в). Момент  $M$  направлен в направлении вращения силы  $2t$  относительно оси вала.

Приведем к оси вала силы, действующие на зубчатое колесо (рис. 5.15а). Перенесем радиальную силу  $F_r$  вдоль линии действия, а окружную силу  $F_t$ – параллельно линии действия. В результате получим, что в месте расположения зубчатого колеса на вал в направлении оси  $X$

действует сила  $F_t$ , в направлении оси  $Y$ – сила  $F_r$ , а в плоскости осей  $XY$ – скручивающий момент  $M=F_t D/2$ , направленный в направлении вращения силы  $F_t$  относительно точки  $C$  (рис. 5.15б).

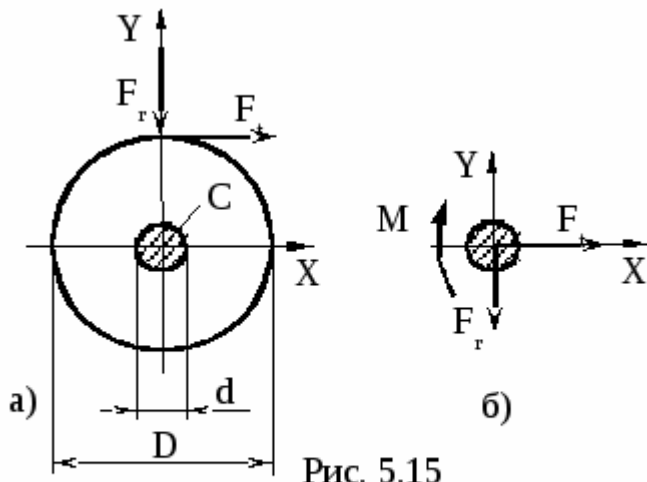
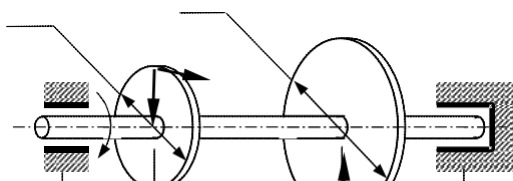
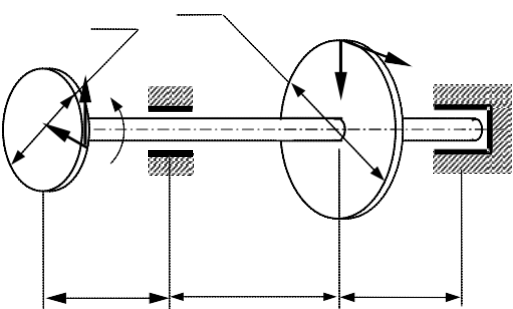
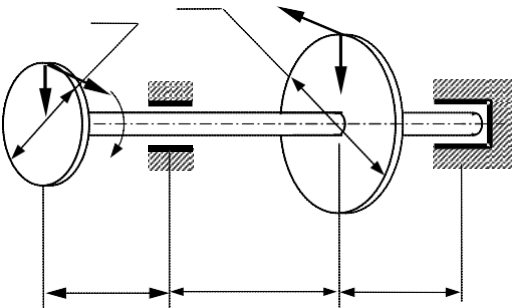
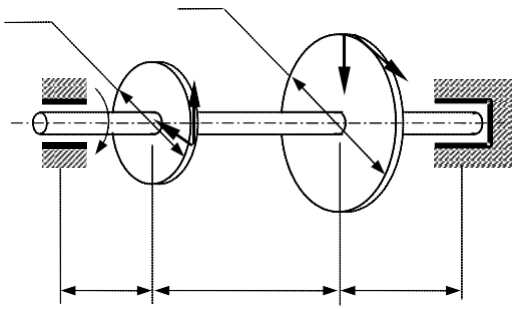
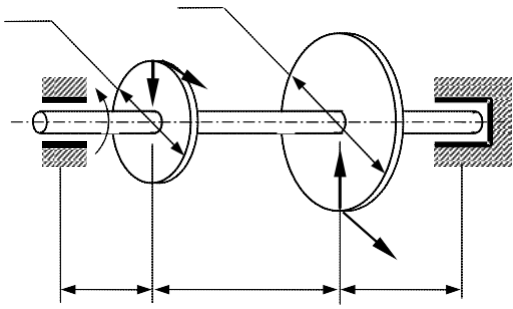


Рис. 5.15

**Задания для практического занятия:**

Определить диаметр вала, если допускаемое напряжение 150 МПа.  
Таблица 16





### **Инструкция по выполнению практического занятия**

1. Составить расчетную схему вала. В задании дана схема с расположенными на валу дисками (зубчатые колеса, шкивы, звездочки), на которые действуют внешние силы. Для того чтобы получить расчетную схему вала необходимо действующие на диски силы привести к оси вала.

3. Изобразить схему сил, действующих на вал в вертикальной плоскости, вычислить значения изгибающего момента  $M_{\text{хот}}$  вертикальных сил и построить эпюру  $M_{\text{х}}$ .

4. Изобразить схему сил, действующих на вал в горизонтальной плоскости, определить значения изгибающего момента  $M_{\text{уот}}$  горизонтальной нагрузки и построить эпюру  $M_{\text{у}}$ .

5. Найти значения суммарного изгибающего момента и построить эпюру  $M_{\text{сум}}$ . (Для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия суммарного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскости  $M_{\text{сум}}$  для всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа). При построении эпюры учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной.

5. Изобразить схему действующих на вал скручивающих моментов, определить значения крутящего момента и построить эпюру  $T$ .

6. По эпюрам  $M_{\text{сум}}$  и  $T$  найти опасное сечение вала. Опасным является сечение, в котором действует максимальный эквивалентный момент. Вычислить для опасного сечения значение

. Из условия прочности опасного сечения определить необходимый диаметр вала и округлить его величину до ближайшего большего значения, кратного пяти миллиметрам.

### **Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.

2. Полнота ответов на поставленные вопросы.

3. Правильность решения задачи

4. По результатам занятия сформулируйте вывод.

5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

по всем пунктам.

### **Практическое занятие № 11 (2ч.)**

Расчёт зубчатой передачи

**Учебная цель:** уметь рассчитывать свойства зубчатой передачи.

**Учебные задачи:**

1. научиться определять параметры зубчатой передачи

**Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- приобрести практические навыки по определению основных параметров зубчатого колеса по модели и построению схемы зацепления зубчатых колёс

знать:

- требования, предъявляемые к оформлению и правила выполнения чертежей зубчатых колес, шлицевых и шпоночных соединений. Изучить правила оформления сборочного чертежа и спецификации.

**Задачи практического занятия:**

- получение навыков проектирования зубчатой передачи: определение геометрических параметров передачи и расчет ее на прочность

**Обеспеченность занятия:**

1. Рабочая тетрадь (обычная, в клетку).
2. Раздаточные материалы (карточки-задания, инструкционные карты)
3. Ручка.
4. Карандаш простой

## Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

*Соосная поверхность зубчатого колеса* – поверхность вращения, ось которой совпадает с осью зубчатого колеса.

*Межосевая линия зубчатой передачи* – прямая линия, пересекающая оси зубчатых колёс под прямым углом.

*Межосевое расстояние ( $a_w$ )*– расстояние между осями зубчатых колёс по межосевой линии.

*Начальная поверхность зубчатого колеса* – каждая из взаимокасающихся соосных поверхностей зубчатых колес передачи, относящаяся к данному зубчатому колесу, в любой точке касания которых проходящие через неё линии зубьев зубчатых колес передачи имеют общую касательную, и вектор скорости относительного движения зубчатых колес направлен вдоль неё или равен нулю.

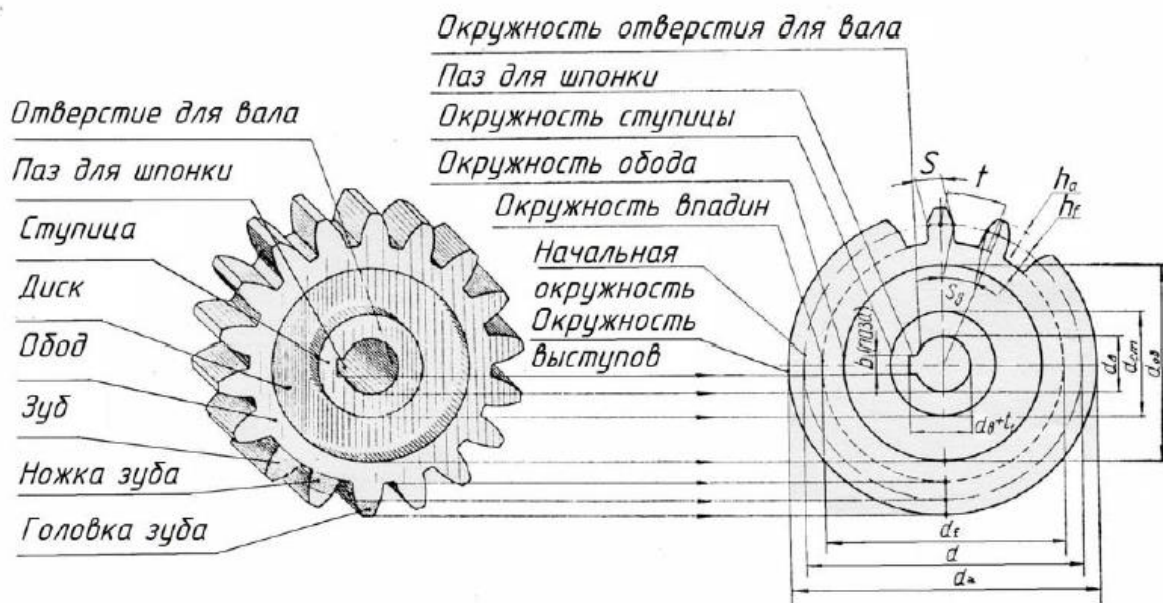
*Начальная окружность* – каждая из взаимокасающихся концентрических окружностей зубчатых колес передачи, принадлежащая начальной поверхности данного зубчатого колеса.

*Передаточное число зубчатой передачи  $i$*  – отношение числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни.

*Радиальный зазор зубчатой передачи* – расстояние между поверхностью вершин одного из зубчатых колес передачи к поверхности впадин другого зубчатого колеса.

$Z$  – число зубьев.

$m$  – нормальный модуль зубьев – это линейная величина в  $p$  раз меньшая нормального шага зубьев.



Условные изображения элементов зубчатого колеса

$d_f$  – *окружность впадин*, проходящая по очертаниям впадин между зубьями:

её условно изображают сплошной тонкой линией.

$d_{об}$  – *окружность обода*, обозначающая внутреннее очертание обода.

$d_{ст}$  – *окружность ступицы*, обозначающая внешнее очертание ступицы.

$d_w$  – диаметр окружности отверстия для вала.

$h$  – высота зуба.

$h_a$  – высота головки зуба.

$h_f$  – высота ножки зуба.

$p_n$  – нормальный шаг зубьев – кратчайшее расстояние по делительной или начальной поверхности зубчатого колеса между эквидистантными одноименными теоретическими линиями соседних зубьев.

S – толщина зуба.

b паза – ширина шпоночного паза.

tj – глубина шпоночного паза.

**Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:**

1. Расскажите порядок проектирования зубчатой цилиндрической передачи.
2. Назовите критерии работоспособности передачи.
3. Перечислите типы зубчатых передач и назовите их преимущества и недостатки.
4. Назовите конструктивные параметры зубчатых передач.

**Задания для лабораторного занятия:**

**Таблица 1 – Исходные данные для расчета.**

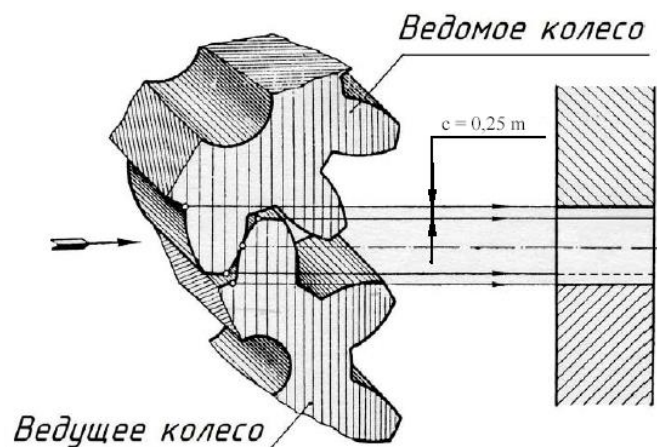
Наименование параметра	Обозначение	Числовые значения
Число зубьев колеса	$z$	Смотри вариант задания
Модуль	$m$	
Диаметр отверстия колеса	$d_b$	

**Таблица 2 – Расчет основных геометрических параметров цилиндрической зубчатой передачи**

Наименование параметра	Обозначение	Расчётная формула
Межосевое расстояние	$a_w$	$a_w = \frac{(Z_{\text{колеса}} + Z_{\text{шестерни)})m}{2}$
Делительный диаметр	$d$	$d = Z \cdot m$
Диаметр вершин зубьев	$d_a$	$d_a = m \cdot (Z + 2)$
Диаметр впадин зубьев	$d_f$	$d_f = m \cdot (Z - 2,5)$
Радиальный зазор	$C$	$C = 0,25 \cdot m$
Высота головки зуба	$h_f$	$h_f = m$
Высота ножки зуба	$h_a$	$h_a = 1,25 \cdot m$
Высота зуба	$h$	$h = 2,25 \cdot m$
Нормальный шаг	$P_n$	$P_n = \pi \cdot m$

**Инструкция по выполнению практического занятия**

1. Сборочный чертёж зубчатой передачи выполнить в двух проекциях: главное изображение и вид слева. При выполнении сборочного чертежа нужно обратить особое внимание на правильное вычерчивание места зацепления двух зубчатых колёс – радиальный зазор передачи равный  $0,25 m$ , а также изменение типов линий окружности выступов колеса.



Радиальный зазор зубчатой передачи

2. При выполнении чертежа конструктивные размеры рассчитать по формулам, приведенным в таблице 2. Масштаб изображения выбрать самостоятельно согласно ГОСТ 2.302.

3. На сборочном чертеже нанести следующие размеры: межосевое расстояние (установочный размер) и диаметры посадочных валов.

Для шлицевых соединений показывают условное обозначение соединения.

В условном обозначении указывают:

а) обозначение поверхности центрирования:  $d$ ,  $D$ ,  $b$ .

б) номинальный размер отверстия, вала или соединения.

Пример условного обозначения при центрировании по  $D$ :  $D6 \times 18 \times 22 \times 5$

Эта запись читается так: шлицевое отверстие с прямобоковыми зубьями, центрирование по наружному диаметру  $D$ , число зубьев 6, внутренний диаметр отверстия 18 мм, наружный диаметр отверстия 22 мм, ширина впадины отверстия 5 мм.

4. На сборочном чертеже в графе основной надписи в соответствии с заданием написать: *Передача цилиндрическая.*

Зубчатое колесо показывают в трех изображениях: продольным фронтальным разрезом на месте главного вида, местным видом на отверстие на виде слева и выносным элементом шлица. Окружности и образующие поверхностей выступов зубьев зубчатого венца и отверстия показывают сплошными основными линиями.

Окружности и образующие поверхностей впадин зубчатого венца и отверстия впадин на продольных разрезах показывают сплошными основными линиями; на виде слева - сплошными тонкими линиями, причем окружности впадин зубчатого венца допускается не показывать. Делительные окружности и образующие делительных поверхностей на изображениях цилиндрических зубчатых колёс показывают штрихпунктирной линией.

Если секущая плоскость проходит через ось зубчатого колеса, то на разрезах и сечениях зубья зубчатого венца условно совмещают с плоскостью чертежа и показывают нерассечёнными, а на разрезах и сечениях отверстий впадины условно совмещают с плоскостью чертежа.

На плоскости перпендикулярной оси отверстия, изображают профиль одного выступа и двух впадин.

На рабочем чертеже зубчатого колеса должны быть помещены таблицы параметров зубчатого венца и параметров шлицевого отверстия.

**Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.

2. Полнота ответов на поставленные вопросы.

3. Правильность решения задачи

4. По результатам занятия сформулируйте вывод.



5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### **Практическое занятие № 12 (2ч.)**

Основные кинематические и силовые характеристики многоступенчатого привода

Учебная цель: Получить представление о многоступенчатом приводе

Учебные задачи:

1. научиться расчету привода

Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:

Студент должен

уметь:

- определять по схеме состав привода

знать:

- условные обозначения передач

Задачи лабораторного занятия:

1. Определить основные кинематические и силовые характеристики многоступенчатого привода

Обеспеченность занятия:

1. Конспект лекций

2. Рабочая тетрадь (обычная, в клетку).

3. Раздаточные материалы (карточки-задания, инструкционные карты)

4. Ручка.

5. Карандаш простой

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия  
Большинство современных машин создается по схеме:

Назначение привода – обеспечить необходимые кинематические и силовые характеристики исполнительного механизма за счет передаточного механизма.

Наиболее широкое применение получили передаточные механизмы вращательного движения, основанные на использовании зацепления ведущего и ведомого звеньев (зубчатых колес). При этом их основной функцией является преобразование (увеличение или уменьшение) скорости (частоты) вращения и вращающего момента.

Основной кинематической характеристикой передаточных механизмов является передаточное отношение  $U$  или частот вращения  $n$ , которое представляет собой соотношение угловых скоростей  $n$  входного (ведущего)  $a$  и выходного (ведомого)  $b$  звеньев (см рис.1). При этом обозначение передаточного отношения имеет два индекса внизу, указывающие направление передачи движения от звена  $a$  к звену  $b$ :

Передачи, уменьшающие скорость вращения, называются редукторами, в которых передаточное отношение реализуется за счет соотношения диаметров  $d$  или числа зубьев  $Z$  ведомого  $b$  и ведущего  $a$  зубчатых колес в зацеплении:

Таким образом редукторы уменьшают скорость вращения в передаточное число раз за счет соотношения чисел зубьев зацепляемых колес:

При этом ведущее зубчатое колесо в цилиндрических и конических передачах, имеющее меньшее число зубьев, называют шестерней, а ведомое – колесом.

Число зубьев шестерни назначают в соответствии с условием. Ориентировочное значение можно рассчитать по зависимостям:

- для цилиндрической передачи;

- для конической передачи.

Расчетное значение округляется до целого числа .

В червячной передаче назначают число заходов червяка в зависимости от передаточного отношения  $U_{ab}$ :

при

при

при

Требуемое число зубьев цилиндрического, конического и червячного колес определяют по зависимости:

Общее передаточное отношение  $U_{общ.}$  многоступенчатого механизма, состоящего из  $m$  отдельных передач (ступеней), определяется как произведение передаточных отношений всех ступеней:

Вопросы для закрепления теоретического материала к практического занятию:

1. Типы передач
2. Привод-это.....
3. Обозначения передач на схеме

Задания для практического занятия:

№ варианта F, кН v, м/с D, м

1	2	0,8	0,25
2	3	0,6	0,35
3	5	0,5	0,45
4	4	0,3	0,5
5	6	0,9	0,6
6	2	0,8	0,45
7	1	0,7	0,25
8	5	0,6	0,14
9	3	0,4	0,16
10	6	0,3	0,25
11	2	0,2	0,35
12	4	0,8	0,45
13	8	0,9	0,4
14	1	0,4	0,6
15	4	0,6	0,85
16	9	0,8	0,7
17	7	0,7	0,6
18	8	0,9	0,25
19	5	0,6	0,35
20	2	0,8	0,45
21	1	0,4	0,15
22	5	0,5	0,2
23	9	0,5	0,3
24	3	0,6	0,65
25	5	0,7	0,45
26	7	0,8	0,5
27	4	0,7	0,6
28	2	0,8	0,5
29	6	0,6	0,3
30	9	0,7	0,25

## Инструкция по выполнению практического занятия Кинематическая схема привода

Для заданной кинематической схемы привода (рис. 2) подобрать двигатель по данным параметрам рабочей машины и выполнить кинематический и силовой расчет привода.

### Исходные данные

F, кН    v, м/с    D, м  
2        0,7        0,35

### Решение

1. Определяем параметры выходного вала привода:

○ мощность:

$$P_{\text{вых}} = P_3 = F \cdot v = 2 \cdot 0,7 = 1,4 \text{ кВт};$$

○ угловую скорость выходного вала:

;

○ частоту вращения выходного вала:  
об/мин.

2. Определяем коэффициент полезного действия привода:

$$\eta = \eta_m \cdot \eta_p \cdot \eta_{\text{з.к}}$$

По табл. 1 приложения

$$\eta_m = 0,98; \eta_p = 0,94; \eta_{\text{з.к}} = 0,97; \eta = 0,98 \cdot 0,94 \cdot 0,97 = 0,89.$$

3. Определяем передаточное число привода:

$$i = i_{\text{ир}} \cdot i_{\text{икз}}$$

По табл. 2 приложения  $i_{\text{р}} = 3; i_{\text{кз}} = 4; i = 3 \cdot 4 = 12.$

4. Определяем требуемые параметры электродвигателя:

○ мощность:

кВт;

○ частоту вращения вала электродвигателя:

$$n_{\text{дв}} = n_{\text{вых}} \cdot i = 38,2 \cdot 12 = 489 \text{ об/мин.}$$

5. По табл. 3 приложения выбираем электродвигатель марки 112 МА8/700 с параметрами:

$$P_{\text{дв}} = 2,2 \text{ кВт}; n_{\text{дв}} = 700 \text{ об/мин.}$$

6. Определяем фактическое передаточное число привода:

.

Принимаем  $i_{\text{кз}} = 5$ , тогда:

.

7. Мощность на валах:

$$P_1 = P_{\text{дв}} \cdot \eta_m = 2,2 \cdot 0,98 = 2,16 \text{ кВт},$$

$$P_2 = P_1 \cdot \eta_p = 2,16 \cdot 0,94 = 2,03 \text{ кВт},$$

$$P_3 = P_2 \cdot \eta_{\text{кз}} = 2,03 \cdot 0,97 = 1,97 \text{ кВт.}$$

8. Частота вращения валов:

$$n_1 = n_{\text{дв}} = 700 \text{ об/мин},$$

об/мин,

об/мин.

9. Угловые скорости валов:

с-1,

с-1,

с-1.

10. Вращающие моменты на валах:

,

Н□м,

Н□м,

Н□м.

Вывод: Снижение угловой скорости в приводе от ведущего вала к ведомому сопровождается увеличением крутящего момента.

Приложение 1

Тип передачи □

Зубчатая с опорами:

цилиндрическая

коническая

0,96□0,98

0,95□0,97

Планетарная:

одноступенчатая

двухступенчатая

0,9□0,95

0,85□0,9

Червячная, при передаточном числе:

свыше 30

свыше 14 до 30

свыше 8 до 14

0,7□0,8

0,75□0,85

0,8□0,9

Ременная (все типы) 0,94□0,96

Цепная 0,92□0,95

Муфта соединительная 0,98

Подшипники качения (одна пара) 0,99

Таблица 2

Вид передачиТвердость зубьев

НВ или HRC Передаточное число

иред ипред

Зубчатая цилиндрическая тихоходная ступень во всех редукторах (ит)

□ НВ 350

HRC 40□56

HRC 56□63 2,5□5

2,5□5

2□4 6,3

6,3

5,6

Быстроходная ступень в редукторах с развернутой схемой (иБ)

□ НВ 350

HRC 40□56

HRC 56□63 3,15□5

3,15□5

2,5□4 8

7,1

6,3

Быстроходная ступень в соосном редукторе (иБ)

□ HB 350

HRC 40□56

HRC 56□63 4□6,3

4□6,3

3,15□5 10

9

8

Коробка передач любая 1□2,5 3,15

Коническая зубчатая □ HB 350

□ HBS 40 1□4

1□4 6,3

5

Червячная - 16□50 80

Ременная - 1,5□4 10

Цепная - 2□4 8

Таблица 3

Двигатели закрытые обдуваемые

Мощность

P, кВт Синхронная частота, об/мин

3000 1500 1000 750

0,25 - - - 71B8/680

0,37 - - 71A6/910 80A8/675

0,55 - 71A4/1390 71B6/900 80B8/700

0,75 71A2/2840 71B4/1390 80A6/915 90LA8/700

1,1 71B2/2810 80A4/1420 80B6/925 90LB8/700

1,5 80A2/2850 80B4/1415 90L6/935 100L8/700

2,2 80B2/2850 90L4/1425 100L6/950 112MA8/700

Продолжение табл. 3

Мощность

P, кВт Синхронная частота, об/мин

3000 1500 1000 750

3 90L2/2840 100S4/1435 112MA6/955 112MB8/700

4 100S2/2880 100L4/1430 112MB6/950 132S8/720

5,5 100L2/2880 112M4/1445 132S6/965 132M8/720

7,5 112M2/2900 132S4/1455 132M6/970 160S8/730

11 132M2/2900 132M4/1460 160S6/975 160M8/730

15 160S2/2940 160S4/1465 160M6/975 180M8/730

18,5 160M2/2940 160M4/1465 180M6/975 -

22 180S2/2945 180S4/1470 - -

30 180M2/2945 180M4/1470 - -

Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.

2. Полнота ответов на поставленные вопросы.

3. Правильность решения задачи

4. По результатам занятия сформулируйте вывод.

5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### **Практическое занятие № 13 (2ч.)**

Практические расчёты на срез и смятие

**Учебная цель:** уметь проводить практические расчеты на срез и смятие

**Учебные задачи:**

1. Научиться рассчитывать детали на смятие
2. Определять допустимую нагрузку при заданных данных

**Требования к результатам усвоения учебной дисциплины:**

Студент должен

уметь:

- проводить практические расчеты на срез и смятие

знать:

-правила расчета детали на смятие

**Задачи практического занятия:**

- Научиться рассчитывать детали на смятие
- Определять допустимую нагрузку при заданных данных

**Обеспеченность занятия:**

1. Рабочая тетрадь (*обычная, в клетку*).
2. Раздаточные материалы (*карточки-задания, инструкционные карты*)
3. Ручка.
4. Карандаш простой

### **Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия**

Расчеты на срез и смятие

Понятие о срезе и смятии, Условия прочности

Срезом или сдвигом называется деформация, возникающая под действием двух близко расположенных противоположно направленных равных сил. При этом возникают касательные напряжения.

Примером элемента металлических конструкций, работающего на срез, может служить заклепка (рис. 75, а). При некоторой величине действующих сил  $F$  стержень заклепки может быть срезан по сечению  $aa$ . Силы  $F$  (рис. 75, б) передаются путем давления стенок отверстия на стержень заклепки.

Деформация среза возникает также в шпоночном соединении, схематично изображенном на рис. 75, в. Вращающий момент  $M$  от шкива передается на вал радиуса  $r$  с помощью сил  $F = M/r$ . Эти силы вызывают срез или сдвиг шпонки по ее среднему сечению. Частный случай среза — скалывание волокнистых материалов, в частности древесины, по плоскостям, параллельным волокнам. При большом давлении может произойти значительное смятие стенок отверстия или стержня заклепки по поверхности их соприкосновения. В шпоночном соединении смятие может произойти по площади контакта вала или шкива со шпонкой.

Смятием называется местная деформация сжатия по площадкам передачи давления. Возникающие нормальные напряжения смятия являются местными; величина их быстро убывает при удалении от площадки соприкосновения элементов.

Чтобы найти напряжения, возникающие в сечении  $aa$  стержня заклепки под действием сил  $F$ , применим метод сечений. Рассечем мысленно стержень заклепки на две части и рассмотрим

условия равновесия одной из частей стержня (рис. 75, б).

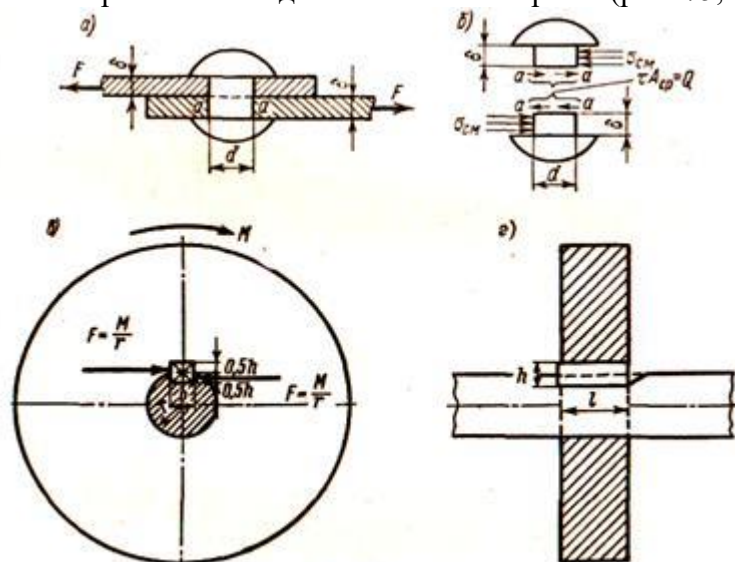


Рис. 75

Со стороны листа на нее передается внешняя сила  $F$ , а по сечению  $aa$  действуют внутренние силы. Поперечная сила  $Q$ , возникающая в сечении  $aa$ , уравновешивает внешнюю силу  $F$  и численно равна ей  $Q = F$ .

Приближенно можно принять, что касательные напряжения распределяются по сечению равномерно

$$\tau = Q/A_{\text{ср}}$$

Условие прочности элементов, работающих на срез, имеет вид

$$\tau = Q/A_{\text{ср}} \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (59)$$

где  $A_{\text{ср}}$ —площадь среза;  $[\tau_{\text{ср}}]$ —допускаемое касательное напряжение.

Величину допускаемого напряжения назначают на основании испытаний на срез. Обычно принимают  $[\tau_{\text{ср}}] = (0,70-0,80) [\sigma]$ .

На стержень заклепки давление со стороны отверстия в листе передается по боковой поверхности полуцилиндра высотой, равной толщине листа.

**Вопросы для закрепления теоретического материала к лабораторному занятию:**

1. Что такое срез?
2. Что такое смятие?
3. Как рассчитать нагрузки при смятии?
4. Площадь среза?

**Задания для практического занятия:**

Рассчитать заклепочное соединение на срез, смятие и растяжение, если  $[\tau]_{\text{ср}} = 70 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_{\text{см}} = 280 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma]_{\text{р}} = 100 \text{ МПа}$ .

#### Инструкция по выполнению практического занятия

1. Проверяем прочность листа в сечении, ослабленном отверстиями под заклепки, на растяжение:
2. Проверяем прочность заклепок на срез, учитывая, что заклепки двухсрезные:
3. Проверяем листы на смятие:

х

**Методика анализа и оценка результатов, полученных в ходе практического занятия**

1. Изображенные рисунки должны быть четкими и понятными.
2. Полнота ответов на поставленные вопросы.
3. Правильность решения задачи
4. По результатам занятия сформулируйте вывод.

5. Оценка ставится общая, объективно по всем пунктам.

### Практическое занятие № 21 (2ч.)

Решение задач на определение гидростатического давления, примеры использования уравнения Бернулли в гидравлических расчётах

Цель занятия:

- уметь применять уравнение Д.Бернулли для решения практических задач;
- по найденным параметрам построить диаграмму уравнения Д.Бернулли.

Задачи практического занятия:

Научиться рассчитывать гидростатическое давление  
построить диаграмму уравнения Д.Бернулли

Обеспеченность занятия:

1. Рабочая тетрадь (обычная, в клетку).
2. Раздаточные материалы (карточки-задания, инструкционные карты)
3. Ручка.
4. Карандаш простой

Пример решения задачи

Из отверстия в боковой стенке открытого сосуда по горизонтальной трубе переменного сечения ( см.рис.) вытекает вода. Определить, пренебрегая потерями напора, расход воды  $Q$ , а также средние скорости и гидродинамические давления в сечениях трубопроводов 1-1, 2-2, если уровень воды в сосуде постоянный ( $H=1\text{м}$ ) и  $d_1=0,1\text{м}$ ;  $d_2=0,25\text{м}$ ;  $z_2=0,15\text{м}$ . истечение происходит в атмосферу.

Решение. Выбирают плоскость сравнения по оси трубы 0-0 и составляют уравнение Д.Бернулли для сечений а-а и 3-3:

$$(10)$$

Учитывая, что при постоянном уровне жидкости в сосуде  $\chi_{\text{я}}=0$ , находят среднюю скорость потока в сечении 3-3 и 2-2:

$$v_3 = 4 \text{ м/с} \quad (11)$$

Используя уравнение неразрывности, находят средние скорости в сечении 1-1

$$v_1 = 10 \text{ м/с} \quad (12)$$

$$v_2 = 1,6 \text{ м/с} \quad (13)$$

Составляют уравнение Д.Бернулли для сечений 1-1 и 3-3:

$$p_1 + \rho v_1^2 / 2g = p_3 + \rho v_3^2 / 2g, \quad (14)$$

$$p_1 = p_3 + \rho / 2g (v_3^2 - v_1^2), \quad (15)$$

$$0,1 \cdot 10^6 + 9190 / (2 \cdot 9,87) (4,432^2 - 1,62^2) = 59000 \text{ Па} = 59 \text{ Кпа}$$

Составляют уравнение Д. Бернулли для сечений 2-2 и 3-3 откуда:

$$(16)$$

$$p_2 + \rho v_2^2 / 2g = p_3 + \rho v_3^2 / 2g + \rho g z_2 \quad (17)$$

$$p_2 = 0,1 \times 10^6 + 9790 / (2 \times 9,87) (4,432^2 - 1,62^2) + 108700 \text{ Па} = 108,7 \text{ кПа}$$

Определяют объемный расход:

$$Q = v_1 \cdot F_1 = 10 \cdot 0,00785 = 0,0785 \text{ м}^3/\text{с} \quad (18)$$



$$= 10 \times 3,14 \times 0,12/4 = 0,0786 \text{ м}^3/\text{с}.$$

2 Применяя уравнение Д.Бернулли

Найти параметры характеризующие движение- жидкости.

Из отверстия в боковой стенке сосуда по горизонтальной трубе переменного сечения (см.рис.выше) вытекает вода. Определить расход воды  $Q$ , а также средние  $j$  скорости и давления в сечениях трубопровода 1-1, 2-2, 3-3, предполагая уровень . воды в сосуде постоянным и пренебрегая гидравлическими сопротивлениями, при # ; следующих данных:

$H=2\text{м}$ ,  $d_1=7,5\text{см}$ ,  $d_2=25\text{см}$ ,  $d_3=10\text{см}$ .

3 Контрольные вопросы

- Написать уравнение Д.Бернулли для струйки идеальной жидкости и реального потока.
- Знать физический и энергетический смысл каждого члена уравнения; Д.Бернулли.
- Знать, как строится диаграмма уравнения Д.Бернулли.